ÜBER DAS SPEKTRUM

POSITIVER GENERATOREN

Dissertation,
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
vorgelegt von

Roland Derndinger
aus Wolfach im Schwarzwald

1979

ÜBER DAS SPEKTRUM POSITIVER GENERATOREN

Dissertation,
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
vorgelegt von

Roland Derndinger
aus Wolfach im Schwarzwald

1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 24. 7. 1979

Dekan: Prof. Dr. H. Salzmann

1. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Nagel

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H.H. Schaefer

Inhalt

		Seite
Einleitung		4
Kapitel 1:	Zur Spektraltheorie stark stetiger Halbgruppen.	10
Teil A:	Stark stetige Halbgruppen.	11
Teil B:	Spektraltheorie.	13
Teil C:	Die adjungierte Halbgruppe.	19
Teil D:	Halbgruppen auf Quotientenräumen.	22
Teil E:	Das F - Produkt von Halbgruppen.	24
Kapitel 2:	Das Spektrum des Generators von Verbandshalbgruppen auf C(X).	29
Teil A:	Verbandshalbgruppen auf C(X).	30
Teil B:	Markov - Verbandshalbgruppen auf C(X).	33
Kapitel 3:	Das Spektrum des Generators von Verbandshalbgruppen.	39
Kapitel 4:	Das Spektrum positiver Generatoren.	47
Literatur		54

Einleitung

Die Untersuchung des Spektrums positiver Abbildungen im Hinblick auf Zyklizitätseigenschaften hat bereits eine lange Geschichte. O. Perron [17] hat gezeigt, daß der Spektralradius einer quadratischen Matrix aus positiven Elementen stets Eigenwert dieser Matrix ist. Im Anschluß daran hat G. Frobenius [4] , [5] nachgewiesen, daß das periphere Spektrum positiver Matrizen aus einer endlichen, nichtleeren Vereinigung von Mengen der Gestalt $r \cdot H$ besteht, wobei r der Spektralradius und H eine Gruppe von Einheitswurzeln ist.
M. Fréchet [3] hat ein erstes Ergebnis im unendlichdimensionalen Fall erhalten; M.G. Krein und M.A. Rutman [9] , T. Ando [1] , G.-C. Rota [19] und H.H. Schaefer [21] erzielten weitere Ergebnisse für positive Operatoren auf Banachverbänden.
Mit Ausnahme des allgemeinsten Problems "Ist das periphere Spektrum jedes positiven Operators auf einem beliebigen Banachverband zyklisch?" wurde die Theorie inzwischen weitgehend abgeschlossen und in H.H. Schaefer's Monographie [23] dokumentiert.

Da positive Operatoren auf Banachverbänden notwendigerweise stetig sind, spielte sich die gesamte Theorie aber im Rahmen der beschränkten Operatoren ab.
Nun sind wesentliche Operatoren z.B. Differentialoperatoren in den Anwendungsgebieten Physik, Biologie, usw. unbeschränkt. Diese Operatoren, soweit sie die zeitliche oder räumliche Entwicklung eines (physikalischen) Systems beschreiben, sind Generatoren von stark stetigen Halbgruppen beschränkter - sehr oft sogar positiver - Operatoren.
Als "positive Generatoren" bezeichnen wir Generatoren solcher positiver Halbgruppen.
Die Spektraltheorie von Generatoren ist für die Anwendungen deshalb von Bedeutung, weil das Spektrum des Generators zusam-

men mit den Spektren der Operatoren der Halbgruppe großen Einfluß hat auf das asymptotische Verhalten der Halbgruppe, wie es in der Stabilitäts- und Ergodentheorie untersucht wird.

Im Gegensatz zur Spektraltheorie positiver Operatoren scheint es bis jetzt nur wenige Einzelergebnisse über das Spektrum positiver Generatoren zu geben, die sich nicht schon aus der allgemeinen Theorie stark stetiger Halbgruppen ableiten lassen.
J. v. Neumann [14] bestimmte das Spektrum gewisser ergodischer Flüsse und gab ein Kriterium an, wann das Spektrum aus der ganzen imaginären Achse besteht.

B. Scarpellini [20] untersuchte systematisch die folgende Situation: gegeben sei ein dynamisches System (Ω, μ, φ) (Ω ein kompakter topologischer Raum, $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ ein stetiger Fluß, μ ein invariantes Maß) und die durch φ induzierten Gruppen $\{T(t)/t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu))$ mit Generator A_T, bzw. $\{S(t)/t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(C(\Omega))$ mit Generator A_S.
Unter leichten Zusatzbedingungen zeigte er, daß die Spektren von A_T und A_S übereinstimmen. Desweiteren machte er Aussagen über das Spektrum von A_S und dessen Zusammenhang mit den Punkten in Ω, die unter φ periodisch sind: falls (unter den obigen Voraussetzungen) das Spektrum von A_S nicht die gesamte imaginäre Achse ist, dann gibt es mindestens einen periodischen Punkt (eingeschlossen Fixpunkte) in Ω.

Eine weitere interessante Arbeit für unser Thema stammt von S. Karlin [8].
Im Wesentlichen werden darin positive Operatoren untersucht, und nur ein letzter kurzer Abschnitt ist positiven stark stetigen Halbgruppen gewidmet. Karlin schreibt einleitend zu diesem Abschnitt: "Much of the analysis valid for the positive operator T and its iterates T^n extends to the case of semi-groups of operators T(t) in which $T(t) > 0$ for $t \geq 0$."

Danach "beweist" Karlin das Theorem: für eine positive stark stetige Halbgruppe $\{T(t)/t \geq 0\}$ liegt die Spektralschranke $s(A) := \sup \{\mathrm{Re}\,\lambda / \lambda \in \sigma(A)\}$ im Spektrum des Generators A.
Wie wir im Kapitel 4 näher ausführen werden, enthält der Beweis eine wesentliche Lücke, die auf einer falschen Interpretation eines Zitats aus [7] beruht.
Anschließend zeigt Karlin ein zweites Theorem über die Existenz eines positiven Eigenvektors zum Eigenwert 0 unter anderem unter den Voraussetzungen, daß die Spektralschranke $s(A) = 0$ ist, und die Halbgruppe aus Kontraktionen besteht.
S. Karlin schreibt, man könne durch den Übergang zu einer "Halbgruppe" $\{S(t)/t \geq 0\}$ $- S(t) = C\, e^{-\lambda t} T(t)$ mit geeignetem $C, \lambda \in \mathbb{R}$ - jede stark stetige Halbgruppe $\{T(t)/t \geq 0\}$ so normieren, daß diese beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind.
Dies ist falsch (siehe (1.11) und (1.15)) !

Am Ende der Arbeit [8] liest man trotzdem: "We remark in closing, without elaborating on details, that much of the other structure of the spectrum of positive operators can be carried over to the semigroup version."

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Bemerkung von Karlin zu verifizieren. Wie aber gerade die obigen Ausführungen zeigen, ist bei dem erwähnten Übergang die notwendige Vorsicht angebracht. Dennoch gelingt es, im Wesentlichen die Spektraltheorie, wie sie in den Arbeiten [11], [24] und [26] für positive Operatoren enthalten ist, auf positive Generatoren zu übertragen.

Da stark stetige Halbgruppen in dieser Arbeit lediglich unter dem Gesichtspunkt der Spektraltheorie betrachtet werden, stellen gewisse Konstruktionen wie z.B. die adjungierte Halbgruppe nur Hilfsmittel dar, und wir verzichten auf eine weitere Ausarbeitung, wie sie z.B. in einer "Dualitätstheorie stark stetiger Halbgruppen" möglich wäre.

Im Folgenden geben wir für jedes Kapitel der Arbeit eine kurze Inhaltsübersicht.

Kapitel 1. Nach einer kurzen Einführung unterteilt sich das Kapitel 1 in fünf Teile, von denen die drei ersten wiederholenden Charakter besitzen. Diese Wiederholung faßt alle die Definitionen und Sätze aus der allgemeinen Theorie stark stetiger Halbgruppen zusammen, die im weiteren Verlauf der Arbeit unbedingt benötigt werden.

Der Teil A bringt die Definitionen der Begriffe "stark stetige Halbgruppe" und "Generator" und danach das bekannte Theorem von Hille - Yoshida, das als Grundlage der gesamten Theorie stark stetiger Halbgruppen angesehen werden kann.

Im Teil B führen wir in die Spektraltheorie von Generatoren ein; die wesentlichen Ergebnisse (1.14), (1.16) haben den Charakter von spektralen Abbildungssätzen zwischen dem Spektrum des Generators und den Spektren der Operatoren der Halbgruppe. Unter (1.15) finden sich die Beispiele, die die Grenzen der erwähnten Sätze aufzeigen.

Der Teil C ist - unter dem spektraltheoretischen Gesichtspunkt - der Konstruktion der "adjungierten Halbgruppe" gewidmet, wie sie von R.S. Phillips [18] stammt.

Wir werden im Teil D die auf invarianten Teilräumen und Quotientenräumen induzierten (stark stetigen) Halbgruppen betrachten und die Generatoren dieser Halbgruppen näher charakterisieren - die Betrachtung dieser Halbgruppen, die in voller Allgemeinheit neu zu sein scheint (Andeutungen in einem Spezialfall finden sich in [20]), ist für die Beweistechniken der folgenden Kapitel unerläßlich.

Der Teil E bringt die Konstruktion eines "F - Produkts" für stark stetige Halbgruppen; d.h. wir werden zu einem gegebenen Banachraum E und einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf E mit Generator $(A, D(A))$ einen neuen Banachraum $\hat{E}$ und eine stark stetige Halbgruppe $\{\hat{T}(t)\}$ auf $\hat{E}$ mit Generator $(\hat{A}, D(\hat{A}))$ konstruieren, so daß die Spektren von A und $\hat{A}$ übereinstimmen, und das approximative Punktspektrum von $\hat{A}$ nur aus Eigenwerten besteht.

Kapitel 2. Verbandshalbgruppen auf C(X), dem Banachverband der stetigen komplexen Funktionen auf einem kompakten Raum X, lassen sich durch Flüsse und Multiplikatoren charakterisieren - dies wird zunächst unter Bezugnahme auf [13] referiert.
Im Teil A beweisen wir einen Satz über das Spektrum von Generatoren stark stetiger Verbandshalbgruppen auf C(X), der besagt, daß eine linke Halbebene der komplexen Ebene entweder im Spektrum des Generators enthalten oder mit dem Spektrum disjunkt ist.
Der Teil B bringt die Spezialisierung des oben erwähnten Satzes auf Markov-Verbandshalbgruppen auf C(X); wir erhalten ein Ergebnis, das dem Theorem (2.2) aus [26] analog ist. Anschließend wird das Spektrum des Generators in Beziehung gebracht zu bestimmten Eigenschaften des assoziierten Flusses. Insbesondere erhalten wir eine Charakterisierung derjenigen Generatoren von Markov-Verbandshalbgruppen, deren Spektrum gleich der imaginären Achse ist.

Kapitel 3. Wir definieren den Begriff der "additiven Zyklizität" einer Menge komplexer Zahlen M - $\lambda \in M$ impliziert $\mathrm{Re}\,\lambda + iz\mathrm{Im}\,\lambda \in M$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ - und beweisen in (3.4) unter wesentlicher Ausnutzung des F - Produkts aus Kapitel 1, Teil E, daß das Spektrum des Generators einer Verbandshalbgruppe auf einem beliebigen Banachverband additiv zyklisch ist. Der Beweis liefert die zusätzliche Information, daß das Punktspektrum als solches ebenfalls additiv zyklisch ist.
Im Satz (3.7) wird für eine gegebene additiv zyklische Menge komplexer Zahlen, die abgeschlossen und deren Realteile nach oben beschränkt sind, eine Verbandshalbgruppe auf einem geeigneten Banachverband konstruiert, so daß das Spektrum des Generators gleich der gegebenen Menge ist. Damit ist insgesamt gezeigt, daß die additive Zyklizität das Spektrum des Generators von Verbandshalbgruppen auf Banachverbänden vollständig bestimmt.

Kapitel 4. Nachdem in den Kapiteln 2 und 3 Verbandshomomorphismen betrachtet worden sind, wenden wir uns jetzt Halbgruppen positiver Operatoren zu. Diese sind sehr viel weniger strukturerhaltend, weshalb man keine Aussagen mehr über das gesamte Spektrum der zugehörigen Generatoren erwarten kann.
Wir beweisen zunächst, daß für einen positiven Generator A die Spektralschranke s(A) im Spektrum liegt.
Mit Hilfe einer Wachstumsbedingung der Resolventen eines positiven Generators - analog zu [23] p.326 - zeigen wir anschließend in (4.9), daß für jeden Eigenwert λ von A, dessen Realteil gleich s(A) ist, die Menge $\{\beta \in \mathbb{C} / \beta = \mathrm{Re}\lambda + iz\mathrm{Im}\lambda , z \in \mathbb{Z}\}$ im Spektrum von A enthalten ist. Der entscheidende Beweisschritt liegt in der Existenz einer gewissen positiven invarianten Linearform.
Im letzten Teil des Kapitels gewinnen wir das gleiche Ergebnis wie in (4.9) unter etwas schwächeren Bedingungen.

Die vorliegende Arbeit entstand unter der Anleitung von
Herrn Professor Dr. Rainer Nagel.

Kapitel 1

Zur Spektraltheorie stark stetiger Halbgruppen

In diesem einführenden Kapitel werden drei Ziele angestrebt. Zum einen sollen grundlegende Fakten der allgemeinen Theorie stark stetiger Halbgruppen dargestellt werden, soweit sie für die Spektraltheorie von Bedeutung sind.
Sodann wird in die Spektraltheorie stark stetiger Halbgruppen eingeführt; dabei wird sowohl auf bekannte Sätze als auch auf neue Techniken, die die Ergebnisse der folgenden Kapitel erst ermöglichen, eingegangen. Auf die Beweise wohlbekannter Tatsachen wird weitgehend verzichtet; man findet diese unter der jeweils angegebenen Literaturstelle.
Schließlich soll dieses Kapitel in die Bezeichnungsweise der ganzen Arbeit einführen; wir halten uns in der Terminologie im Wesentlichen an [23] H. H. Schaefer: Banach Lattices and Positive Operators.

Wir beschäftigen uns in der gesamten Arbeit ausschließlich mit Spektraltheorie, weshalb der zugrunde liegende Skalarkörper immer der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sein wird.
Wir betrachten durchgängig komplexe Banachräume bzw. komplexe Banachverbände (im Sinne von [23] Ch.II §11), die sich als Komplexifizierung $E = E_r \oplus iE_r$ eines reellen Banachraumes bzw. reellen Banachverbandes E_r darstellen lassen.
Wie der Begriff Banachverband so werden auch alle anderen ordnungstheoretischen Begriffe Verbandsideal, Unterverband usw. im komplexen Sinne verstanden.

Für die folgenden Grundlagen sei zum Beispiel auf [7] verwiesen.

Teil A : Stark stetige Halbgruppen

Es sei E ein komplexer Banachraum;
eine Familie von beschränkten Operatoren $\{T(t) / t \in [0,\infty)\} \subset \mathcal{L}(E)$ heißt kontinuierliche Halbgruppe, wenn

$$T(0) = Id \quad \text{und}$$
$$T(t + s) = T(t)\,T(s) \quad \text{für } t, s \in [0,\infty) \text{ gilt.}$$

Kontinuierliche Halbgruppen werden im Folgenden abkürzend mit $\{T(t)\}$ bezeichnet.

(1.1) Definition. Eine kontinuierliche Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt stark stetig, falls die Abbildung $h : [0,\infty) \to \mathcal{L}(E)$, $t \mapsto T(t)$ stetig ist für die starke Operatortopologie auf $\mathcal{L}(E)$.

(1.2) Bemerkungen und Beispiel.

(i) Stark stetige Halbgruppen werden in der Literatur oft als C_0 - Halbgruppen bezeichnet.

(ii) Eine kontinuierliche Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist schon dann stark stetig, wenn $\lim_{t\to 0} T(t) = Id$ in der starken Operatortopologie gilt ([16] p.4) .

(iii) Für eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ gibt es Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$ ([16] p.4) .

(iv) Falls man für eine kontinuierliche Halbgruppe $\{T(t)\}$ die Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto T(t)$ in der Normtopologie von $\mathcal{L}(E)$ fordert, erhält man "normstetige" Halbgruppen.
Es gilt ([16] p.1/2):
$\{T(t)\}$ ist genau dann eine normstetige Halbgruppe, wenn es einen beschränkten Operator A auf E gibt, so daß $T(t) = e^{tA}$ gilt.
Wir erhalten damit insbesondere viele Beispiele stark stetiger Halbgruppen.

(1.3) Definition. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf E. Der (i.a. nicht beschränkte) Operator $(A, D(A))$, der durch

$$D(A) := \{x \in E / \lim_{h\to 0} h^{-1}(T(h)x - x) \text{ existiert}\} \quad \text{und}$$
$$Ax := \lim_{h\to 0} h^{-1}(T(h)x - x) \quad \text{für } x \in D(A) \text{ definiert wird,}$$

heißt Generator von $\{T(t)\}$.

Man sieht unmittelbar, daß der Definitionsbereich D(A) von A ein Untervektorraum von E, und A auf D(A) linear ist.

(1.4) Lemma. Sei (A, D(A)) der Generator der stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$; dann gilt:

(i) Für alle $x \in D(A)$ und $t \geq 0$ liegt $T(t)x$ in $D(A)$, die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ ist differenzierbar, und

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \ .$$

(ii) Für alle $t \geq 0$ und $x \in E$ liegt $\int_0^t T(s)x\,ds$ in $D(A)$; es gilt

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\,ds \quad \text{für } x \in E \quad \text{und}$$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,ds \quad \text{für } x \in D(A) \ .$$

Beweis: [16] p.5

Im folgenden berühmten Theorem von Hille – Yoshida (1948) werden die Generatoren stark stetiger Halbgruppen charakterisiert ([7]). $\varrho(A)$ bezeichne die Resolventenmenge von A und $R(\lambda,A)$ die Resolvente.

(1.5) Theorem. Ein linearer Operator (A, D(A)) ist genau dann der Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$, die $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ erfüllt, wenn

(i) A abgeschlossen und dicht definiert ist, und

(ii) das Intervall (ω, ∞) in $\varrho(A)$ enthalten ist, und für $\lambda > \omega$

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ gilt.}$$

(1.6) Korollar 1. (A, D(A)) erzeugt genau dann eine stark stetige Halbgruppe von Kontraktionen, wenn

(i) A abgeschlossen und dicht definiert ist, und

(ii) das Intervall $(0, \infty)$ in $\varrho(A)$ enthalten ist, und für $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \lambda^{-1} \text{ gilt.}$$

(1.7) Koroller 2. Sei (A, D(A)) der Generator der stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

Dann gilt $\{\lambda \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\} \subset \varrho(A)$, und die Resolvente $R(\lambda,A)$ läßt sich für $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ durch $R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$ $(x \in E)$ darstellen.

Diese Integraldarstellung der Resolvente wird im weiteren Verlauf der Arbeit eine wesentliche Rolle spielen.

Bevor wir zur Spektraltheorie übergehen, soll noch kurz angedeutet werden, wie positive Operatoren auf komplexen Banachverbänden definiert werden - für eine ausführliche Diskussion siehe [23] Ch.II §11.

(1.8) Bemerkung. Sei E ein komplexer Banachverband, der sich als Komplexifizierung $E = E_r \oplus iE_r$ ($\mathbb{R}$ - direkte Summe) des reellen Banachverbandes E_r schreiben läßt.
Sei $T \in \mathcal{L}(E)$: T heißt reell, wenn $T(E_r) \subset E_r$; T heißt positiver Operator (Verbandsoperator), wenn T reell und $T|_{E_r}$ ein positiver Operator (Verbandsoperator) ist.
Wir betrachten eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ positiver Operatoren auf E mit Generator (A, D(A)); da T(t) reell ist für $t \geq 0$, ist auch A "reell" in folgendem Sinn:

$$D(A) = D(A) \cap E_r \oplus i(D(A) \cap E_r) \quad \text{und}$$
$$A(D(A) \cap E_r) \subset E_r \ .$$

Zur Bezeichnung: im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir oft "stark stetige Halbgruppen positiver Operatoren" bzw. "stark stetige Halbgruppen von Verbandsoperatoren" abkürzend als "positive Halbgruppen" bzw. "Verbandshalbgruppen" bezeichnen.

Teil B : Spektraltheorie

Zunächst werden die benötigten Definitionen für beschränkte Operatoren $T \in \mathcal{L}(E)$ (E komplexer Banachraum) wiederholt.
Unter dem Spektrum $\sigma(T)$ verstehen wir die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß die Resolvente $R(\lambda,T) := (\lambda - T)^{-1}$ in $\mathcal{L}(E)$ nicht existiert.
$\varrho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ heißt Resolventenmenge.
In $\sigma(T)$ lassen sich auf verschiedene Weise Teilmengen auszeichnen (siehe z.B. [23] , [20]); jede der Möglichkeiten hat gewisse Vor- und Nachteile. Wir haben uns für die folgende Einteilung - sowohl bei beschränkten Operatoren als auch bei Generatoren (siehe (1.10)) - entschieden, weil sich damit die oft benutzten spektralen Abbildungssätze (1.14) und (1.21) elegant formulieren lassen. Wir nehmen dadurch allerdings im Beweis zu (2.9) Nachteile in Kauf.

$P\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda - T)$ ist nicht injektiv$\}$ heißt Punktspektrum,

$A\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} /$ für eine normierte Folge (x_n) gilt $(\lambda - T)x_n \to 0\}$ heißt approximatives Punktspektrum,

$R\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda - T)E$ ist nicht dicht in $E\}$ heißt Residualspektrum.

Das Spektrum - eine kompakte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$ - ist die nicht notwendig disjunkte Vereinigung von $A\sigma(T)$ und $R\sigma(T)$. Das Punktspektrum ist im approximativen Punktspektrum enthalten, welches abgeschlossen ist.
Schließlich bezeichne $r(T) := \sup\{|\lambda| / \lambda \in \sigma(T)\}$ den Spektralradius von T.

In der Beschreibung des Spektrums einer stark stetigen Halbgruppe bzw. des Generators spielen zwei Konstanten - ω_0 und $s(A)$ - eine große Rolle! Sei E ein komplexer Banachraum und $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf E. Wir setzen

$$\omega_0 := \inf\{\omega \in \mathbb{R} / \text{es gibt ein } M_\omega \geq 1 \text{ mit } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \text{ für } t \geq 0\} .$$

Nach (1.2)(iii) ist die Menge, deren Infimum gebildet wird, nichtleer, also $\omega_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Wie das Beispiel (1.15)(i) zeigt, ist ω_0 nicht unbedingt in der obigen Menge enthalten.
Wir setzen, wie üblich, $e^{-\infty \cdot t} = 0$ für $t > 0$ und $e^{-\infty \cdot 0} = 1$.

(1.9) Satz. Für eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ gilt

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t} \quad \text{für alle } t \geq 0 .$$

Für den Beweis siehe [12] Kap.III 5.1 .

(1.10) Definition. Sei E ein komplexer Banachraum; (A, D(A)) der Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf E:

$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} / \text{die Resolvente } R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \text{ existiert nicht in } \mathcal{L}(E)\}$ heißt Spektrum von A,

$\varrho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ heißt Resolventenmenge,

$P\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda - A) \text{ ist nicht injektiv}\}$ heißt Punktspektrum,

$A\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} / \text{für eine normierte Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \text{ gilt } (\lambda - A)x_n \to 0 \text{ für } n \to \infty\}$ heißt approximatives Punktspektrum,

$R\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda - A)D(A) \text{ ist nicht dicht in } E\}$ heißt Residualspektrum,

$s(A) := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda / \lambda \in \sigma(A)\}$ heißt Spektralschranke von A.
(wie üblich sei $\sup \emptyset = -\infty$).

(1.11) Bemerkungen.

(i) $\sigma(A)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die nach rechts beschränkt ist (siehe (1.7)), aber im allgemeinen leer sein kann (siehe (1.15)i); es gilt $\sigma(A) = A\sigma(A) \cup R\sigma(A)$, dabei ist die Vereinigung nicht notwendig disjunkt.

(ii) $P\sigma(A)$ ist in $A\sigma(A)$ enthalten; $A\sigma(A)$ ist abgeschlossen und nichtleer, falls $\sigma(A) \neq \emptyset$ ist.

(iii) Die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda,A)$ ist auf der Resolventenmenge $\varrho(A)$ lokal holomorph.

Die Resolvente $R(\lambda,A)$ bildet E auf D(A) ab; es gilt die folgende wichtige Gleichung $A\,R(\lambda,A) = \lambda\,R(\lambda,A) - Id$, also $A\,R(\lambda,A) \in \mathcal{L}(E)$, und die Resolventengleichung $R(\lambda,A) - R(\mu,A) = (\lambda-\mu)R(\lambda,A)R(\mu,A)$ für $\lambda, \mu \in \varrho(A)$.

(iv) Sei E ein Banachverband und $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf E mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$; die Integraldarstellung von $R(\lambda,A)$ für $\lambda > \omega$ (siehe (1.7)) zeigt, daß $R(\lambda,A)$ ebenfalls positiv ist. Sei nun $\mu > s(A)$, $\lambda > \max\{\omega, \mu\}$; nach (iii) und der Definition von s(A) können wir die Resolvente in eine Reihe entwickeln: $R(\mu,A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\mu)^n\, R(\lambda,A)^{n+1}$. Dies impliziert sofort, daß auch für $\mu > s(A)$ die Resolvente $R(\mu,A)$ positiv ist.

Die gemachte Aussage erhält in (4.3) eine wesentliche Verschärfung.

(v) Für die Beweise in den folgenden Kapiteln ist es oft zweckmäßig, die Halbgruppe $\{T(t)\}$ bzw. das Spektrum des Generators, der hier ausnahmsweise mit $(A_T, D(A_T))$ bezeichnet werde, in geeigneter Weise zu normieren; z.B. kann es sinnvoll sein, mit einer beschränkten Halbgruppe zu arbeiten, oder die Spektralschranke $s(A_T) = 0$ zu setzen . Mit der folgenden Transformation der Halbgruppe und des Generators kann dies fast immer unter Beibehaltung wichtiger Eigenschaften der ursprünglichen Halbgruppe $\{T(t)\}$ bewerkstelligt werden. Wir betrachten die Operatoren $S(t) := e^{-\lambda t}T(t)$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $\{S(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe, deren Generator $(A_S, D(A_S))$ sich leicht ausrechnen läßt: $D(A_S) = D(A_T)$ und $A_S = A_T - \lambda$. Für den Zusammenhang der Spektren ergibt sich unmittelbar $\sigma(A_S) = \{\beta - \lambda \,/\, \beta \in \sigma(A_T)\}$, $P\sigma(A_S) = \{\beta - \lambda \,/\, \beta \in P\sigma(A_T)\}$ usw. Falls $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ gilt, so folgt $\|S(t)\| \leq M$ für $\lambda := \omega$. Man beachte jedoch, daß sich durch diese Transformation nicht mehrere Normierungen z.B. $\|T(t)\| \leq 1$ und $s(A) = 0$ gleichzeitig erreichen lassen.

Im Folgenden werden wir den Zusammenhang zwischen den Spektren von A und T(t) untersuchen. Dieser Zusammenhang ist die Ursache für enge Beziehungen zur Stabilitätstheorie und Ergodentheorie stark stetiger Halbgruppen.
Eine erste einfache Aussage liefert das Theorem von Hille-Yoshida.

(1.12) Proposition. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $(A, D(A))$.
Dann gilt $s(A) \leq \omega_0$ (bzw. $e^{s(A)\,t} \leq r(T(t))$).
Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$; nach Definition von ω_0 gibt es $M_\omega \geq 1$ und $\omega \in (\omega_0, \mathrm{Re}\,\lambda)$ mit $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$.
Nach (1.7) existiert $R(\lambda,A)$, also $s(A) \leq \omega_0$.

Eine weitergehende Behauptung wird durch folgendes Lemma vorbereitet, welches auch in späteren Beweisen noch vonnöten sein wird.

(1.13) Lemma. (siehe [16] p.42)
$(A, D(A))$ erzeuge die stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf E;
sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $t \geq 0$.
Durch $B_\lambda(t)x := \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\,ds$ $(x \in E)$ wird ein beschränkter Operator auf E definiert mit

(i) $B_\lambda(t)E \subset D(A)$,
(ii) $(e^{\lambda t} - T(t))x = (\lambda - A)B_\lambda(t)x$ für alle $x \in E$,
(iii) $(e^{\lambda t} - T(t))x = B_\lambda(t)(\lambda - A)x$ für alle $x \in D(A)$.

(1.14) Theorem. Sei E ein komplexer Banachraum, $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $(A, D(A))$. Dann gilt für $t \geq 0$

$$e^{t\,\sigma(A)} \subset \sigma(T(t)) .$$

Im einzelnen ist
(i) $e^{tP\sigma(A)} \subset P\sigma(T(t))$,
(ii) $e^{tA\sigma(A)} \subset A\sigma(T(t))$,
(iii) $e^{tR\sigma(A)} \subset R\sigma(T(t))$.

Beweis:
(i) Sei $\lambda \in P\sigma(A)$; dann gibt es ein $0 \neq x \in D(A)$ mit $(\lambda - A)x = 0$.
Aus (1.13)(iii) folgt $(e^{\lambda t} - T(t))x = 0$, also $e^{\lambda t} \in P\sigma(T(t))$ mit gleichem Eigenvektor x .

(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ eine normierte Folge mit $(\lambda - A)x_n \to 0$. Wiederum nach (1.13)(iii) gilt $\|(e^{\lambda t} - T(t))x_n\| \leq \|B_\lambda(t)\| \, \|(\lambda - A)x_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.
(iii) Es gilt $(e^{\lambda t} - T(t))E = (\lambda - A)B_\lambda(t)E \subset (\lambda - A)D(A)$. Für $\lambda \in R\sigma(A)$ ist $(\lambda - A)D(A)$ und folglich auch $(e^{\lambda t} - T(t))E$ nicht dicht in E. Damit liegt $e^{\lambda t}$ in $R\sigma(T(t))$.

Es erhebt sich nun die Frage, ob weitergehende Aussagen über das Verhältnis von $e^{t\sigma(A)}$ und $\sigma(T(t))$ bzw. $s(A)$ und ω_0 möglich sind. Für normstetige Halbgruppen $\{T(t)\}$ (siehe (1.2)(iv)) gilt nach dem spektralen Abbildungssatz $e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t))$ für alle $t \geq 0$ und damit auch $s(A) = \omega_0$.
Im allgemeinen sind jedoch diese Gleichheiten für stark stetige Halbgruppen nicht mehr erfüllt. Dies wird an folgenden Beispielen, die zum Teil ausgeführt, zum Teil nur zitiert werden, gezeigt.

(1.15) Beispiele.

(i) Sei $E = C_0([0,1))$ der Banachverband aller komplexen stetigen Funktionen auf $[0,1)$, die im Punkt 1 stetig mit Wert 0 fortgesetzt werden können.

Durch $T(t)f(x) := \begin{cases} f(x+t) & \text{für } x+t < 1 \\ 0 & \text{für } x+t \geq 1 \end{cases}$ $\quad (x \in [0,1),\ f \in E)$

wird eine stark stetige Verbandshalbgruppe auf E definiert.
Der Generator $(A, D(A))$ ist $Af = f'$ für
$f \in D(A) = \{f \in E / f' \text{ existiert und } f' \in E\}$.
Die Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist nilpotent, denn für $t \geq 1$ gilt $T(t) = 0$.
Also folgt $\sigma(T(t)) = \{0\}$ für $t > 0$ und nach (1.14) $\sigma(A) = \emptyset$.
Während hier $e^{t\sigma(A)} \neq \sigma(T(t))$ ist, gilt noch $s(A) = \omega_0 = -\infty$.
(ii) Sei $E = l^2(\mathbb{Z})$ und $\{T(t)\}$ die stark stetige Halbgruppe von unitären Operatoren

$$T(t)((x_z)_{z\in\mathbb{Z}}) := (e^{izt} x_z)_{z\in\mathbb{Z}} \quad \text{mit Generator}$$

$$A((x_z)_{z\in\mathbb{Z}}) = (izx_z)_{z\in\mathbb{Z}} \quad \text{für}$$

$$(x_z)_{z\in\mathbb{Z}} \in D(A) = \{(x_z)_{z\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) / \sum_{z\in\mathbb{Z}} |zx_z|^2 < \infty\}.$$

Für $t = 1$ gilt $P\sigma(T(1)) = \{e^{iz} / z \in \mathbb{Z}\}$ und
$\sigma(T(1)) = A\sigma(T(1)) = \{\gamma \in \mathbb{C} / |\gamma| = 1\}$; für den Generator hin-

gegen $\sigma(A) = P\sigma(A) = \{ iz/z \in \mathbb{Z} \}$. Es gilt also wieder $e^{\sigma(A)} \neq \sigma(T(1))$, aber $s(A) = \omega_0 = 0$; zu $e^{\sigma(A)}$ kommen lediglich noch die Häufungspunkte von $e^{\sigma(A)}$ hinzu.

(iii) Ein erstes kompliziertes Beispiel mit $s(A) \neq \omega_0$ findet sich in [7] p.664 ff. Für die dort mit Hilfe von "fractional integration" konstruierte Halbgruppe $\{T(t)\}$ gilt: $\sigma(A) = \emptyset$ - also $s(A) = -\infty$ - und $\{ e^{\frac{1}{2}\pi t} \cdot \gamma / |\gamma| = 1 \} \cup \{ e^{-\frac{1}{2}\pi t} \cdot \gamma / |\gamma| = 1 \} \subset A\sigma(T(t)) = \sigma(T(t))$ - also $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

(iv) J. Zabczyk [27] bewies 1975 durch die Angabe einer im Gegensatz zu (iii) einfachen Halbgruppe folgenden Satz:
Zu je zwei reellen Zahlen $a \leq b$ gibt es einen Banachraum E und eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit $s(A) = a$ und $\omega_0 = b$.

Auf das Verhältnis von $s(A)$ und ω_0 wird im Kapitel 4 für den Spezialfall "positiver Halbgruppen" nochmals eingegangen.

Da die globale Aussage $\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)}$ nicht möglich ist, wenden wir uns den einzelnen Teilen des Spektrums zu. Für das Punktspektrum und Residualspektrum läßt sich die Situation vollständig beschreiben.

(1.16) Theorem. Für eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit Generator $(A, D(A))$ gilt:

$$e^{t\, P\sigma(A)} \subset P\sigma(T(t)) \subset e^{t\, P\sigma(A)} \cup \{0\} \quad \text{für } t > 0.$$

Beweis: Nach (1.14)(i) genügt es, die zweite Inklusion zu zeigen. Der folgende Beweis, der von dem üblichen funktionentheoretischen Beweis (siehe [16]) abweicht, findet sich auch in [13] .
Wir können nach (1.11)(v) ohne Beschränkung der Allgemeinheit $1 \in P\sigma(T(t_0))$ für ein $t_0 > 0$ annehmen. Dann ist der Fixraum $F := \{x \in E / T(t_0)x = x\}$ ein nichttrivialer, abgeschlossener $T(t)$-invarianter Teilraum von E. Die eingeschränkten Operatoren $T(t)|_F$ definieren eine stark stetige, periodische also kompakte Gruppe in $\mathcal{L}(F)$ versehen mit der starken Operatortopologie. Da diese Gruppe abelsch ist, gibt es nach dem Theorem von Peter-Weyl einen eindimensionalen invarianten Teilraum $\langle z \rangle \subset F$.

Für jedes $t \geq 0$ ist damit $T(t)|_F z = T(t)z = a(t)z$, $a(t) \in \mathbb{C}$.
Die Abbildung $t \mapsto a(t)$ ist ein stetiger Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ in $(\mathbb{C}, \cdot)$ mit $a(t_0) = 1$. Es gibt daher ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a(t) = e^{2\pi i k \frac{t}{t_0}}$, also $T(t)z = e^{2\pi i k \frac{t}{t_0}} z$ für alle $t \geq 0$.
Durch Differenzieren folgt $z \in D(A)$ und $Az = 2\pi i \frac{k}{t_0} \cdot z$, also $1 \in e^{t_0 P\sigma(A)}$.

Es sollte noch darauf hingewiesen werden, daß die Inklusion $P\sigma(T(t)) \subset e^{tP\sigma(A)} \cup \{0\}$ wegen der Vieldeutigkeit der Logarithmusfunktion nur eine Existenzaussage für Eigenwerte von A darstellt. Dasselbe gilt auch für (1.21).

Teil C : Die adjungierte Halbgruppe

In der Spektraltheorie für beschränkte Operatoren werden Aussagen über das Residualspektrum oft auf Aussagen über das Punktspektrum des adjungierten Operators zurückgeführt. Dieselbe Methode ist auch für stark stetige Halbgruppen von großer Bedeutung, und wurde von R.S. Phillips [18] entwickelt.
Da wir sie für die weiteren Kapitel benötigen, werden wir sie in einiger Ausführlichkeit darlegen.

Sei E ein Banachraum, $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf E mit Generator $(A, D(A))$.
Die kontinuierliche Halbgruppe der Adjungierten $\{T(t)'\}$ auf dem Dual E' ist - wie das Beispiel der "Translationen" $T(t)f(x)=f(x+t)$ auf $L^1(\mathbb{R},\mu)$ (μ das Lebesgue-Maß) zeigt - im allgemeinen nicht stark stetig.
Der adjungierte Operator $(A', D(A'))$ des Generators $(A, D(A))$ ist im allgemeinen kein Generator mehr; er ist zwar abgeschlossen, und $D(A')$ ist $\sigma(E',E)$-dicht in E', aber nicht in jedem Fall dicht in der Normtopologie von E' - hinreichende Bedingungen für $\overline{D(A')} = E'$ sind z. B. die Beschränktheit von A oder die Reflexivität von E.

Man betrachtet deshalb die Menge

$$E^* := \{x' \in E' / \lim_{t \to 0} \|T(t)'x' - x'\| = 0\} .$$

Es ist nach [22] Ch.III 4.5 unmittelbar einzusehen, daß E^* ein abgeschlossener, $T(t)'$-invarianter Teilraum von E' ist, und daß die

kontinuierliche Halbgruppe der Einschränkungen $\{T(t)'|_{E^*}\}$ stark stetig ist.

(1.17) Definition. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf dem Banachraum E mit Generator (A, D(A)).

(i) Für $t \geq 0$: $T(t)^* := T(t)'|_{E^*}$

(ii) Die stark stetige Halbgruppe $\{T(t)^*\} \subset \mathcal{L}(E^*)$ heißt adjungierte Halbgruppe.

(iii) Der Generator von $\{T(t)^*\}$ wird mit $(A^*, D(A^*))$ bezeichnet.

(1.18) Korollar. Falls E ein Banachverband ist, und die Adjungierten T(t)' Verbandsoperatoren sind, so ist sofort klar, daß E^* ein Unterverband von E' und die adjungierte Halbgruppe eine Verbandshalbgruppe ist.

Die technischen Aussagen, die in folgendem Hilfssatz zusammengefaßt werden, ermöglichen erst eine vernünftige Anwendung der adjungierten Halbgruppe.

(1.19) Hilfssatz. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in (1.17) gilt:

(i) $E^* = \overline{D(A')}$; insbesondere ist also E^* $\sigma(E',E)$-dicht in E'.

(ii) Die Menge $\{x'_t \in E' / x'_t = \int_0^t T(s)'x'ds \,,\ x' \in E',\ t \geq 0\}$ ist total in E^*.

(iii) $D(A^*) = \{x' \in D(A') / A'x' \in E^*\}$ und $(A^*, D(A^*)) \subset (A', D(A'))$.

Für die Beweise siehe [13] und [18].

Die Definition (1.17) ist die für die Spektraltheorie "richtige" Definition, denn es lassen sich jetzt die Gleichheiten $\sigma(T') = \sigma(T)$ bzw. $R\sigma(T) = P\sigma(T')$, die für beschränkte Operatoren gelten, auf stark stetige Halbgruppen und deren Generatoren übertragen.

(1.20) Satz. Sei E ein komplexer Banachraum, $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator (A, D(A)). Dann gilt

(i) $\sigma(T(t)) = \sigma(T(t)^*) = \sigma(T(t)')$ und
$R\sigma(T(t)) = P\sigma(T(t)^*) = P\sigma(T(t)')$ für alle $t \geq 0$,

(ii) $\sigma(A) = \sigma(A^*) = \sigma(A')$ und $R\sigma(A) = P\sigma(A^*) = P\sigma(A')$,

(iii) $R(\lambda,A)' = R(\lambda,A')$ und $R(\lambda,A^*) = R(\lambda,A')|_{E^*}$ für $\lambda \in \varrho(A)$.

Die Beweise findet man in [7], [13] und [18].

Nach diesem Einschub über die adjungierte Halbgruppe können wir jetzt sehr einfach die zu (1.16) analoge Behauptung über die Residualspektren beweisen.

(1.21) Theorem. Für eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit Generator $(A, D(A))$ gilt

$$e^{tR\sigma(A)} \subset R\sigma(T(t)) \subset e^{tR\sigma(A)} \cup \{0\} \quad \text{für } t \geq 0 .$$

Beweis: Mit (1.20)(ii) und (1.16) folgt für $t > 0$

$e^{tR\sigma(A)} = e^{tP\sigma(A^*)} \subset P\sigma(T(t)^*) = R\sigma(T(t))$ und

$R\sigma(T(t)) = P\sigma(T(t)^*) \subset e^{tP\sigma(A^*)} \cup \{0\} = e^{tR\sigma(A)} \cup \{0\}$.

Wie oben angekündigt stellen die Theoreme (1.16) und (1.21) eine sehr enge Beziehung zwischen den Punktspektren von A und T(t) bzw. den Residualspektren von A und T(t) her.
Der Teil des Spektrums, über den im Rahmen der allgemeinen Theorie nichts Gleichwertiges ausgesagt werden kann, liegt im approximativen Punktspektrum (siehe (1.15)); und zwar handelt es sich dabei um die Spektralwerte von T(t), die in $A\sigma(T(t))$, aber nicht in $P\sigma(T(t))$ oder $R\sigma(T(t))$ liegen.

Für beschränkte Operatoren kann man das Studium des approximativen Punktspektrums mittels des F - Produkts ([23] Ch.V §1) auf die Betrachtung des Punktspektrums eines anderen Operators zurückführen. Wir benötigen im Kapitel 3 eine analoge Konstruktion für Generatoren stark stetiger Halbgruppen. Da im Kapitel 3 aber speziell Verbandshalbgruppen betrachtet werden, soll diese Konstruktion, die auch für allgemeine Halbgruppen interessant ist, hier im Kapitel 1 ihren Platz finden.
Vorher jedoch ist es noch notwendig, Halbgruppen auf Quotientenräumen zu betrachten. Wir werden dabei auch weitere Spektralaussagen machen, die in Kapitel 2 benötigt werden.

Teil D : Halbgruppen auf Quotientenräumen

Sei E wieder ein Banachraum und $(A, D(A))$ der Generator von $\{T(t)\}$; E_0 sei ein abgeschlossener, $T(t)$ - invarianter Teilraum von E. Aufgrund der Definition von A folgt dann sofort, daß E_0 auch "A - invariant" ist, d.h. $A(D(A) \cap E_0) \subset E_0$.

Mit $\hat{E} := E/E_0$ werde der Quotientenraum nach E_0 bezeichnet; $q : E \to \hat{E}$ sei die (stetige) Quotientenabbildung. Die durch $\hat{T}(t)q(x) := q(T(t)x)$ wohldefinierten Operatoren in $\mathcal{L}(\hat{E})$ bilden eine kontinuierliche Halbgruppe $\{\hat{T}(t)\}$.

(1.22) Lemma. Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

(i) $\{\hat{T}(t)\}$ ist eine stark stetige Halbgruppe auf $\hat{E}$; der Generator werde mit $(\hat{A}, D(\hat{A}))$ bezeichnet.

(ii) $D(\hat{A}) = q(D(A))$ und $\hat{A}q(x) = q(Ax)$ für $x \in D(A)$.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von q.

(ii) Wir können eine (große) positive Zahl λ so wählen, daß $\lambda \in \varrho(A) \cap \varrho(\hat{A})$ ist und $R(\lambda,\hat{A}) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, \hat{T}(s)ds$ gilt. Mit $\hat{R}(\lambda,A)$ werde der von $R(\lambda,A)$ auf $\hat{E}$ induzierte Operator bezeichnet. Wegen der Stetigkeit läßt sich q mit der Integralbildung vertauschen, also folgt für $x \in E$:

$$R(\lambda,\hat{A})q(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, \hat{T}(s)q(x)ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, q(T(s)x)ds =$$

$$q\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)x\,ds\Big) = qR(\lambda,A)(x) = \hat{R}(\lambda,A)q(x) .$$

Dies impliziert $D(\hat{A}) = R(\lambda,\hat{A})\hat{E} = \hat{R}(\lambda,A)\hat{E} = q(D(A))$.

Der Rest folgt wieder schnell aus den Definitionen und ebenfalls der Stetigkeit von q.

Neben der "Quotientenhalbgruppe" auf $\hat{E}$ läßt sich auch die Halbgruppe der eingeschränkten Operatoren $\{T(t)|_{E_0}\} \subset \mathcal{L}(E_0)$ bilden.

Analog zu (1.22) gilt offensichtlich folgendes Lemma.

(1.23) Lemma.

(i) $\{T(t)|_{E_0}\}$ ist eine stark stetige Halbgruppe auf E_0 .

(ii) Der Generator dieser Halbgruppe ist $A|_{D(A)\cap E_0}$ mit dem Definitionsbereich $D(A) \cap E_0$.

Wir werden jetzt Beziehungen zwischen den Spektren $\sigma(A)$, $\sigma(\hat{A})$ und $\sigma(A|_{D(A)\cap E_0})$ bzw. den Resolventenmengen herstellen, wie sie auch für beschränkte Operatoren gelten ([11], [15]).
Wir bezeichnen mit $\varrho_\infty(A)$ die nach rechts unbeschränkte Komponente der Resolventenmenge $\varrho(A)$; sei $\xi > \omega$ (siehe (1.7)), dann ist

$$\varrho_\infty(A) := \{\lambda \in \varrho(A) / \text{es gibt einen stetigen Weg mit Anfangspunkt } \xi \text{ und Endpunkt } \lambda, \text{ der in } \varrho(A) \text{ verläuft}\}.$$

(1.24) Satz. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $(A, D(A))$.

(i) $\sigma(A) \subset \sigma(\hat{A}) \cup \sigma(A|_{D(A)\cap E_0})$;

(ii) $\lambda \in \varrho_\infty(A)$ impliziert

(a) $\lambda \in \varrho(A|_{D(A)\cap E_0})$ und $R(\lambda, A|_{D(A)\cap E_0}) = R(\lambda, A)|_{E_0}$,

(b) $\lambda \in \varrho(\hat{A})$ und $R(\lambda, \hat{A}) \circ q = q \circ R(\lambda, A)$.

Beweis:

(i) Offenbar gilt $P\sigma(A) \subset P\sigma(\hat{A}) \cup P\sigma(A|_{D(A)\cap E_0})$; denn für $0 \neq x \in D(A)$ mit $Ax = \lambda x$ gilt entweder $x \in E_0$ und damit nach (1.23) $\lambda \in P\sigma(A|_{D(A)\cap E_0})$ oder $x \notin E_0$, also $q(x) \neq 0$, und damit nach (1.22) $\hat{A}q(x) = q(Ax) = q(\lambda x) = \lambda q(x)$.

Wir werden zeigen, daß $\varrho(\hat{A}) \cap \varrho(A|_{D(A)\cap E_0})$ in $\varrho(A)$ enthalten ist.

Nach der obigen Überlegung ist $(\lambda - A)$ injektiv für $\lambda \in \varrho(\hat{A}) \cap \varrho(A|_{D(A)\cap E_0})$. Die Surjektivität ergibt sich so:

sei $z \in E$; wegen $\lambda \in \varrho(\hat{A})$ und nach (1.22)(ii) gibt es Elemente $z_1 \in E_0$ und $y_1 \in D(A)$ mit $(\lambda - A)y_1 = z + z_1$.

Wegen $\lambda \in \varrho(A|_{D(A)\cap E_0})$ und nach (1.23) gibt es ein $y_2 \in D(A)$ mit $(\lambda - A)y_2 = -z_1$, insgesamt folgt $(\lambda - A)(y_1 + y_2) = z$.

$(\lambda - A)$ ist also bijektiv und abgeschlossen, weshalb nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen $(\lambda - A)^{-1}$ stetig ist.

(ii) Es gelte $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$; für $\xi > \omega$ zeigt die Integraldarstellung der Resolvente $R(\xi, A)$, daß $R(\xi, A)E_0 \subset E_0$ ist.

Sei $\lambda \in \varrho_\infty(A)$; mit Hilfe der Kreisscheibenmethode der Funktionentheorie, die man auf den Weg, der in $\varrho(A)$ von ξ nach λ führt, anwenden kann, sieht man ein, daß auch $R(\lambda, A)E_0 \subset E_0$ ist.

(a) Man rechnet sofort nach, daß $R(\lambda, A)|_{E_0}$ die Resolvente $R(\lambda, A|_{D(A)\cap E_0})$ darstellt.

(b) Die Abbildung $R_\lambda : \hat{E} \to D(\hat{A}) \quad q(x) \mapsto q(R(\lambda,A)x)$ ist wohldefiniert und es gilt nach (1.22)(ii) für $x \in D(A)$
$R_\lambda(\lambda - \hat{A})q(x) = R_\lambda q((\lambda - A)x) = q(x)$ bzw. für $x \in E$
$(\lambda - \hat{A})R_\lambda(q(x)) = (\lambda - \hat{A})q(R(\lambda,A)x) = q(x)$, also $R_\lambda = R(\lambda,\hat{A})$.

Wir betrachten nochmals die gleiche Situation wie oben.
Bekanntlich läßt sich der starke Dual von $\hat{E}$ mit der Polaren $(E_o)^o$ von E_o in E' identifizieren. Sei $T(t) \in \mathcal{L}(E)$ und $\hat{T}(t)$ der auf $\hat{E}$ induzierte Operator; die Adjungierte $\hat{T}(t)'$ ist die Restriktion von $T(t)'$ auf $(E_o)^o$. Folgender Hilfssatz für stark stetige Halbgruppen ist dann unmittelbar einleuchtend.

(1.25) Hilfssatz. $\{T(t)\}$ sei eine stark stetige Halbgruppe auf E mit Generator $(A, D(A))$, E_o sei ein abgeschlossener $T(t)$-invarianter Teilraum .
Dann gilt $(\hat{A}', D(\hat{A}')) \subset (A', D(A'))$, und damit ist das Punktspektrum von $\hat{A}'$ in dem Punktspektrum von A' enthalten.

Teil E : Das F - Produkt von Halbgruppen

Der letzte Teil des Kapitels 1 wird der angekündigten Konstruktion eines F - Produkts für stark stetige Halbgruppen gewidmet.
$(A, D(A))$ erzeuge wiederum die stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf einem Banachraum E. Einfache Beispiele zeigen, daß die auf dem F - Produkt im Sinne von [23] Ch.V §1 induzierte kontinuierliche Halbgruppe im allgemeinen nicht stark stetig ist. Das jetzt zu konstruierende F - Produkt, welches nur für den Frechét-Filter auf $\mathbb{N}$ durchgeführt wird, ist ein abgeschlossener Teilraum des oben erwähnten F - Produkts und stimmt im Falle normstetiger Halbgruppen - d.h. bei beschränktem Generator - mit diesem überein.
Der wesentlichste Unterschied besteht darin, daß in [23] das F - Produkt nicht von den betrachteten Operatoren abhängt, während es bei uns wesentlich von der Halbgruppe abhängig ist.
Die Konstruktion erfolgt in zwei Schritten.

$m(E)$ sei der Banachraum aller beschränkten E-wertigen Folgen versehen mit der sup - Norm $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup\{\|x_n\| / n\in\mathbb{N}\}$.
Wir definieren den Teilraum
$\tilde{m}(E) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in m(E) / \lim_{t\to 0} \|T(t)x_n - x_n\| = 0 \text{ gleichmäßig in } n\in\mathbb{N}\}$
und die kontinuierliche Halbgruppe $\{\tilde{T}(t)\} \subset \mathcal{L}(\tilde{m}(E))$ mit
$\tilde{T}(t)((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (T(t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Man sieht sofort ein, daß $\tilde{m}(E)$ ein abgeschlossener Teilraum von $m(E)$, $\{\tilde{T}(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe und $\|\tilde{T}(t)\| = \|T(t)\|$ ist.
Wir bezeichnen den Generator von $\{\tilde{T}(t)\}$ mit $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$.
Im folgenden Lemma wird dieser Generator charakterisiert.

(1.26) Lemma. Es gilt
$D(\tilde{A}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E) / x_n \in D(A) \text{ und } (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)\}$
und $\tilde{A}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\tilde{A})$.

Beweis:
(a) Wir wählen ein $\lambda > 0$, so daß $R(\lambda,\tilde{A}) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \tilde{T}(s)ds$ ist, und werden die Gleichheit $R(\lambda,\tilde{A}) = \tilde{R}(\lambda,A)$ zeigen, wobei die letztere Abbildung analog zu $\tilde{T}(t)$ gebildet ist.

Wir betrachten die Projektionen von $\tilde{m}(E)$ auf die m-te Komponente:
$P_m : \tilde{m}(E) \to E \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_m$. Wegen der Stetigkeit von P_m können wir für jedes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)$ schließen:
$P_m \circ R(\lambda,\tilde{A})((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = P_m(\lim_{t\to\infty} (\int_0^t e^{-\lambda s} \tilde{T}(s)((x_n)_{n\in\mathbb{N}})ds)) =$
$\lim_{t\to\infty} P_m (\int_0^t e^{-\lambda s} \tilde{T}(s)((x_n)_{n\in\mathbb{N}})ds) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x_m\, ds$
$= R(\lambda,A)x_m$; also gilt $R(\lambda,\tilde{A}) = \tilde{R}(\lambda,A)$.

(b) Die Behauptung ergibt sich so: $D(\tilde{A}) = R(\lambda,\tilde{A})\tilde{m}(E) =$
$\{(R(\lambda,A)y_n)_{n\in\mathbb{N}} / (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)\} =$
$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E) / x_n \in D(A) \text{ und } (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)\}$, da

nach (1.11)(iii) $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} = (AR(\lambda,A)y_n)_{n\in\mathbb{N}} =$
$(\lambda R(\lambda,A)y_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)$ ist.
Der zweite Teil der Behauptung folgt ganz analog hierzu.

Im nächsten Teil der Konstruktion des F - Produkts gehen wir zu einem Quotientenraum von $\tilde{m}(E)$ über.
Mit $c_0(E)$ werde der Raum aller E - wertigen Nullfolgen bezeichnet.
Jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist relativkompakt;
daraus folgt nach [22] Ch.III 4.5 $\lim_{t\to 0} T(t)x_n = x_n$
gleichmäßig für $n\in\mathbb{N}$, also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)$.
$c_0(E)$ ist also ein $\tilde{T}(t)$-invarianter abgeschlossener Teilraum von $\tilde{m}(E)$.

(1.27) Definition. (i) Der Quotientenraum $\hat{E} := \tilde{m}(E)/c_0(E)$ heiße F - Produkt von E bezüglich der Halbgruppe $\{T(t)\}$.
(ii) $\{\hat{T}(t)\}$ bezeichne die von $\{\tilde{T}(t)\}$ auf $\hat{E}$ induzierte stark stetige Halbgruppe mit Generator $(\hat{A}, D(\hat{A}))$.

Wie in [23] so ergibt sich die Norm auf $\hat{E}$ zu $\|\hat{x}\| = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|$
für $\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + c_0(E) \in \hat{E}$, und es gilt $\|\hat{T}(t)\| = \|T(t)\|$ für $t \geq 0$.
Auch jetzt gelingt es, den Generator $(\hat{A}, D(\hat{A}))$ noch näher zu beschreiben.
$q : \tilde{m}(E) \to \hat{E}$ bezeichne wieder die Quotientenabbildung.

(1.28) Lemma. In der obigen Situation gilt
$D(\hat{A}) = q(D(\tilde{A}))$ und $\hat{A}q((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = q\tilde{A}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = q((Ax_n)_{n\in\mathbb{N}})$
für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\tilde{A})$.
Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (1.22) und (1.26) .

Das folgende Theorem stellt das Ziel der gesamten F - Produkt - Konstruktion dar.

(1.29) Theorem. Sei E ein Banachraum und $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $(A, D(A))$; wie oben sei das F - Produkt bezüglich $\{T(t)\}$ konstruiert. Dann gilt
(i) $\sigma(A) = \sigma(\hat{A})$ und
(ii) $A\sigma(A) = A\sigma(\hat{A}) = P\sigma(\hat{A})$.

Beweis: Wir beweisen zunächst (ii).

$A\sigma(A) \subset P\sigma(\hat{A})$: für $\lambda \in A\sigma(A)$ gibt es eine normierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A)$ mit $(\lambda - A)x_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Nach (1.13) gilt für $t \geq 0$

$$\|T(t)x_n - x_n\| \leq \|T(t)x_n - e^{\lambda t}x_n\| + |e^{\lambda t} - 1| \cdot \|x_n\| \leq$$
$$\|\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)(A-\lambda)x_n ds\| + |e^{\lambda t} - 1| .$$

Der letzte Ausdruck konvergiert für $t \to 0$ gleichmäßig in $n\in\mathbb{N}$ gegen 0, also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)$.

Sei $\hat{x} := q((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$; wegen (1.13)(iii) liegt $(T(t)x_n - e^{\lambda t}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $c_0(E)$, also folgt $\hat{T}(t)\hat{x} = e^{\lambda t}\hat{x}$.

Durch Differenzieren folgt $\hat{x} \in D(\hat{A})$ und $\hat{A}\hat{x} = \lambda\hat{x}$.

Da das Punktspektrum von $\hat{A}$ im approximativen Punktspektrum von $\hat{A}$ enthalten ist, brauchen wir nur noch die Inklusion $A\sigma(\hat{A}) \subset A\sigma(A)$ zeigen.

Für $\lambda \in A\sigma(\hat{A})$ existiert eine normierte Folge $(\hat{x}^m)^{m\in\mathbb{N}}$ in $D(\hat{A})$ mit $(\lambda - \hat{A})\hat{x}^m \to 0$ für $m \to \infty$. Nach (1.28) kann man die Elemente dieser Folge darstellen durch $\hat{x}^m = q((x_n^m)_{n\in\mathbb{N}})$ mit $x_n^m \in D(A)$. Außerdem kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Elemente x_n^m als normiert voraussetzen.

Die obige Konvergenz läßt sich dann als $\limsup_{n\to\infty} \|(\lambda - A)x_n^m\| \to 0$ für $m \to \infty$ schreiben.

Deshalb können wir eine Folge $z_k = x_{nk}^{m_k}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|(\lambda - A)z_k\| = 0$ auswählen; dies liefert aber $\lambda \in A\sigma(A)$.

Nun zum Beweis von (i).

Für die Inklusion $\sigma(A) \subset \sigma(\hat{A})$ müssen wir nur noch $R\sigma(A) \subset R\sigma(\hat{A})$ nachweisen.

Sei $\lambda \in R\sigma(A)$; dann gibt es ein $y \in E$, so daß für alle $x \in D(A)$ $\|(\lambda - A)x - y\| \geq 1$ gilt. Wir setzen $\hat{y} := q((y,y,y,\cdots))$; für $\hat{x} = q((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ mit $x_n \in D(A)$ gilt dann

$$\|(\lambda - \hat{A})\hat{x} - \hat{y}\| = \limsup_{n\to\infty} \|(\lambda - A)x_n - y\| \geq 1, \text{ also } \lambda \in R\sigma(\hat{A}) .$$

Wir zeigen jetzt noch $\rho(A) \subset \rho(\hat{A})$.

$(\lambda - \hat{A})$ muß für $\lambda \in \rho(A)$ wegen (ii) notwendigerweise injektiv sein.

Sei $\hat{x} = q((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{m}(E)$; $(R(\lambda,A)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt dann auch in $\tilde{m}(E)$, und es gilt nach (1.28)

$(\lambda - \hat{A})q((R(\lambda,A)x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = q((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, also ist $(\lambda - \hat{A})$ surjektiv.

Da $\hat{A}$ abgeschlossen ist, folgt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Behauptung $\lambda \in \varrho(\hat{A})$.
Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

(1.30) Korollar. Sei E ein Banachverband, $\{T(t)\}$ eine stark stetige Verbandshalbgruppe mit Generator $(A, D(A))$.
Dann ist $\hat{E}$ ein Banachverband und $\hat{T}(t)$ sind Verbandsoperatoren.

Beweis: Man sieht mit Hilfe der Dreiecksungleichung sofort ein, daß $\tilde{m}(E)$ ein Unterverband von $m(E)$ ist. Damit ergibt sich leicht die Behauptung; man erkennt, daß $\hat{E}$ in diesem Fall ein Unterverband des F - Produkts im Sinne von [23] ist.

Eine abschließende Bemerkung zum F - Produkt sei hier noch angeschlossen. Nach (1.29) wird das approximative Punktspektrum des Generators A zum Punktspektrum von $\hat{A}$. Für die Operatoren der Halbgruppe gilt im allgemeinen nicht $A\,\sigma(T(t)) = P\,\sigma(\hat{T}(t))$; in Anbetracht des spektralen Abbildungssatzes (1.16) und der Beispiele (1.15)(ii)-(iv) darf das für stark stetige Halbgruppen konstruierte F - Produkt diese Relation nicht erfüllen. Das von uns konstruierte F - Produkt transformiert nur diejenigen Spektralwerte von $A\,\sigma(T(t))$ nach $P\,\sigma(\hat{T}(t))$, für die eine Folge approximativer Eigenvektoren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\tilde{m}(E)$ existiert. Im Hinblick hierauf ist Beispiel (1.15)(ii) sehr instruktiv.

Kapitel 2

Das Spektrum des Generators von Verbandshalbgruppen auf C(X)

Im Anschluß an die einführenden Sätze, die der Strukturuntersuchung von Verbandshalbgruppen auf C(X) dienen, gliedert sich das vorliegende Kapitel in zwei Teile. Im Teil A behandeln wir beliebige Verbandshalbgruppen auf C(X), mit der einzigen Einschränkung, daß die Einsfunktion $\mathbb{1}$ auf X im Definitionsbereich des Generators A liegt – diese Einschränkung ist, wie in [13] p.51 gezeigt wird, weniger inhaltlicher als vielmehr technischer Art;
im folgenden Teil B werden die gewonnenen Ergebnisse auf den Fall von Markov-Verbandshalbgruppen spezialisiert und durch weitere Untersuchungen über das Spektrum von A ergänzt.

Im ganzen Kapitel sei $E = C(X)$ der Banachverband der stetigen komplexen Funktionen auf einem kompakten Raum X.
Um Eigenschaften des Spektrums des Generators A einer stark stetigen Verbandshalbgruppe eingehend diskutieren zu können, benötigt man die Charakterisierung solcher Halbgruppen mittels des assoziierten Flusses und eine genauere Beschreibung von A. Eine ausführliche Darstellung dieses Themenkreises findet sich in [13], Kap.I Abschnitt 1. Die Beweise, die in [13] für den reellen Banachverband $C_{\mathbb{R}}(X)$ geführt werden, lassen sich unter Berücksichtigung von (1.8) sofort auf den komplexen Fall übertragen.

(2.1) Theorem. Für eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf C(X) mit Generator (A, D(A)) und mit $\mathbb{1} \in D(A)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\{T(t)\}$ ist eine Verbandshalbgruppe.

(b) Es gibt einen stetigen Fluß $\varphi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ und eine reelle stetige Funktion q auf X, so daß für alle $x \in X$ und $f \in C(X)$ gilt: $T(t)f(x) = \exp\left(\int_0^t q(\varphi(s,x))ds\right) \cdot f(\varphi(t,x))$.

(c) $A = \delta + M_q$, wobei $(\delta, D(\delta))$ eine Derivation auf C(X) ist (d.h. $D(\delta)$ ist eine konjugationsinvariante Unteralgebra von C(X) und für $f, g \in D(\delta)$ gilt $\delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g)$), die eine Halbgruppe erzeugt, und wobei M_q ein Multiplikationsoperator auf C(X) ist (d.h. $M_q : C(X) \to C(X)$ $f \mapsto qf$ für ein $q \in C_{\mathbb{R}}(X)$).

(2.2) Korollar 1. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Verbandshalbgruppe mit $\mathbb{1} \in D(A)$. Dann existiert eine reelle Zahl a, für die $T(t)\mathbb{1} \geq e^{at}\mathbb{1}$ gilt.

Beweis: Setze $a := \min \{q(x)/x \in X\}$; (2.1)b liefert sofort die Behauptung.

(2.3) Korollar 2. Für eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf C(X) mit Generator (A, D(A)) sind äquivalent:

(a) $\{T(t)\}$ ist eine Halbgruppe von Markov-Verbandsoperatoren.

(a') $\{T(t)\}$ ist eine Halbgruppe von Algebra * -Homomorphismen.

(b) Es gibt einen stetigen Fluß $\varphi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$, so daß für alle $x \in X$ und $f \in C(X)$ $T(t)f(x) = f(\varphi(t,x))$ gilt.

(c) Der Generator (A,D(A)) ist eine Derivation.

Beweis: (a) und (a') sind nach [23] Kap.III 9.1 Remark äquivalent. Die übrigen Äquivalenzen folgen unmittelbar aus (2.1) und der Tatsache, daß Derivationen die $\mathbb{1}$ annullieren.

Teil A : Verbandshalbgruppen auf C(X)

Wir machen im folgenden Theorem Aussagen darüber, wie sich das Spektrum des Generators stark stetiger Verbandshalbgruppen in einer linken Halbebene der komplexen Zahlen verhält. Die Ergebnisse entsprechen den Aussagen, die in [24] über das Spektrum von Verbandsoperatoren auf C(X) gemacht werden.

(2.4) Theorem. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Verbandshalbgruppe auf C(X) mit Generator (A,D(A)) und $\mathbb{1} \in D(A)$; φ sei der nach (2.1) assoziierte Fluß, a sei die nach (2.2) existierende Zahl mit $T(t)\mathbb{1} \geq e^{at}\mathbb{1}$.

(a) Gilt für alle $s \neq t$ $\varphi(s,X) \neq \varphi(t,X)$, so ist die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\lambda \leq a\}$ im approximativen Punktspektrum von A enthalten.

(b) Gilt dagegen $\varphi(s,X) = \varphi(t,X)$ für zwei positive Zahlen $s \neq t$, so ist entweder $\{\lambda \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\lambda < a\} \subset P\sigma(A')$, oder es gilt $\{\lambda \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\lambda < a\} \cap \sigma(A) = \emptyset$.

Der Beweis des Theorems wird in zwei Teile zerlegt, die als Lemmata formuliert werden. Dabei erlaubt es uns die in (1.11) erwähnte Transformation, den Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit für a = 0 zu führen.

(2.5) Lemma 1. Ist für $s \neq t$ $\varphi(s,X) \neq \varphi(t,X)$, so gilt $\{\lambda \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\} \subset A\sigma(A)$.

Beweis: Da das approximative Punktspektrum abgeschlossen ist, genügt es, $\{\lambda \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\,\lambda < 0,\ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0\} \subset A\sigma(A)$ zu zeigen.
Wir setzen $\lambda_1 := \mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\lambda_2 := \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, $\varepsilon := \min\{|\frac{\pi}{2\lambda_2}|, 1\} > 0$.
a) Aus der Voraussetzung folgt, daß es in X eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:
für alle $s \in [0, n-\frac{\varepsilon}{6}]$ gilt $\varphi(s,x_n) \notin \varphi(n,X)$ und
für alle $s \neq t$ aus demselben Intervall gilt $\varphi(s,x_n) \neq \varphi(t,x_n)$.
Diese beiden Eigenschaften und der Fortsetzungssatz von Tietze gestatten es, eine Folge stetiger, positiver, normierter Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu definieren mit

$$f_n(\varphi(s,x_n)) = 0 \text{ für } s \in [0, n-\varepsilon],$$
$$f_n(\varphi(s,x_n)) = 1 \text{ für } s \in [n-\tfrac{2}{3}\varepsilon,\ n-\tfrac{1}{3}\varepsilon],$$
$$f_n(\varphi(n,X)) = \{0\}, \text{ d.h. } T(n)f_n = 0.$$

b) Die Funktionen $h_n := \int_0^n e^{\lambda s} T(n-s) f_n ds = -\int_0^n e^{\lambda(n-s)} T(s) f_n ds$ liegen nach (1.13) im Definitionsbereich von A und es gilt $\|(\lambda - A)h_n\| = \|T(n)f_n - e^{\lambda n} f_n\| = e^{\lambda_1 n}$ (nach a)).
Wenn wir zur Abkürzung $c := \int_{\frac{5}{6}\varepsilon}^{\frac{7}{6}\varepsilon} \cos(\lambda_2 s) ds > 0$ schreiben, ergibt sich mit a) folgende Abschätzung:

$$|h_n(x_n)|^2 = |\int_0^n e^{\lambda s} T(n-s) f_n(x_n) ds|^2 = |\int_0^{\varepsilon} e^{\lambda s} T(n-s) f_n(x_n) ds|^2 \geq$$
$$(\int_0^{\varepsilon} e^{\lambda_1 s} \cos\lambda_2 s\ T(n-s) f_n(x_n) ds)^2 \geq (e^{\lambda_1 \varepsilon} \cdot \int_{\frac{5}{6}\varepsilon}^{\frac{7}{6}\varepsilon} \cos\lambda_2 s\ T(n-s) f_n(x_n) ds)^2$$
$$\geq (e^{\lambda_1 \varepsilon} \cdot c)^2 .$$ Dies impliziert $\|h_n\| \geq e^{\lambda_1 \varepsilon} \cdot c > 0$.

c) Die Definition $g_n := \frac{h_n}{\|h_n\|}$ liefert uns nun die normierten approximierenden Eigenfunktionen:
Nach b) und wegen $\lambda_1 < 0$ gilt $\|(\lambda - A)g_n\| \leq (e^{\lambda_1 \varepsilon} \cdot c)^{-1} \cdot e^{\lambda_1 n} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$; also liegt λ im approximativen Punktspektrum von A.

Für das folgende Lemma setzen wir $Y := \bigcap_{s \geq 0} \varphi(s,X)$. Es gilt aufgrund der Flußeigenschaft von φ für $s \geq t$ $\varphi(s,X) \subset \varphi(t,X)$.
Da $\varphi(s,\cdot)$ stetig und X kompakt ist, ist $\varphi(s,X)$ kompakt und Y nichtleer.

(2.6) Lemma 2. Ist $\varphi(s,X) = \varphi(t,X)$ für zwei positive Zahlen $s \neq t$, so gilt entweder $\{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda < 0\} \subset P\sigma(A')$

oder $\{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda < 0\} \cap \sigma(A) = \emptyset$.

Beweis: a) $J := \{f \in C(X)/f|_Y \equiv 0\}$ ist ein abgeschlossenes, $T(t)$ - invariantes Verbandsideal von $C(X)$, und der Quotientenraum $C(X)/_J$ läßt sich mit $C(Y)$ identifizieren.
$\{\hat{T}(t)\}$ sei die auf $C(Y)$ induzierte stark stetige Halbgruppe mit Generator $(\hat{A}, D(\hat{A}))$ (siehe dazu auch (1.22)).
Aufgrund der Voraussetzungen gilt für $\hat{f} \in C(Y)$ ebenfalls $\|\hat{T}(t)\hat{f}\| \geq \|\hat{f}\|$.
Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 := Re\lambda < 0$ und $\hat{f} \in C(Y)$; für alle $t > 0$ gilt dann

$$\|(e^{\lambda t} - \hat{T}(t))\hat{f}\| \geq \left| |e^{\lambda t}| \cdot \|\hat{f}\| - \|\hat{T}(t)\hat{f}\| \right| \geq (1 - e^{\lambda_1 t})\|\hat{f}\| .$$

Aus der Definition von $\hat{A}$ folgt daraus für $\hat{f} \in D(\hat{A})$ sofort die Ungleichung : $\|(\lambda - \hat{A})\hat{f}\| \geq -\lambda_1\|\hat{f}\|$.

b) Falls $\sigma(\hat{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda < 0\} \neq \emptyset$ ist, so liegt wegen der letzten Normbeziehung aus a) die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda < 0\}$ im Punktspektrum von $\hat{A}'$, dieses ist aber nach (1.25) im Punktspektrum von A' enthalten.

c) Wir nehmen nun $\sigma(\hat{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda < 0\} = \emptyset$ an. Die Voraussetzung $\varphi(s,X) = \varphi(t,X)$ für zwei verschiedene positive Zahlen s, t impliziert, daß die Halbgruppe der eingeschränkten Operatoren $\{T(t)|_J\}$ nilpotent ist, also gilt $r(T(t)|_J) = 0$ und nach (1.14) $\sigma(A|_J) = \emptyset$.
Mit (1.24) ergibt sich $\sigma(A) \subset \sigma(\hat{A})$ und damit die Behauptung.

Der folgende Satz zum Abschluß von Teil A macht eine Aussage über das Spektrum des Generators der adjungierten Halbgruppe $(A^*, D(A^*))$, wenn die Adjungierten $T(t)'$ Verbandsoperatoren sind.

(2.7) Satz. Sei $E = C(X)$, $(A, D(A))$ erzeuge die Halbgruppe $\{T(t)\}$, deren Adjungierte $T(t)'$ Verbandsoperatoren seien.
$\lambda \in A\sigma(A^*)$ impliziert dann $Re\lambda \in P\sigma(A^*)$.

Beweis: Nach (1.18) ist E^* ein Unterverband von E'.
Für $\lambda \in A\sigma(A^*)$ existiert eine normierte Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A^*)$ mit $(\lambda - A^*)\mu_n \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Nach (1.13) und da $T(t)^*$ ebenfalls Verbandsoperatoren sind, ist auch die Folge $(|e^{\lambda t}| - T(t)^*)|\mu_n|$ eine Nullfolge. Die Folge $(|\mu_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen schwach*-Häufungspunkt $\mu \geq 0$ mit $\|\mu\| = 1$.
Da $T(t)^*$ $\sigma(E^*,E)$-stetig ist, folgt $T(t)^*\mu = e^{Re\lambda \cdot t}\mu$ für $t > 0$.
Durch Differenzieren ergibt sich $\mu \in D(A^*)$ und $A^*\mu = Re\lambda \cdot \mu$.

Teil B : Markov-Verbandshalbgruppen auf C(X)

Wir werden zunächst die Ergebnisse aus Teil A spezialisieren.

(2.8) Proposition. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe von Markov-Verbandsoperatoren auf $E = C(X)$ mit Generator $(A, D(A))$.

$\lambda \in A\sigma(A)$ impliziert (i) $\overline{\lambda} \in A\sigma(A)$ und

(ii) $m\lambda \in A\sigma(A)$ für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis: (i) folgt sofort aus (2.3) (a'), wenn man als approximierende Eigenfunktionen die konjugiert komplexen Funktionen $(\overline{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nimmt.

(ii) $m = 0$: da $A\mathbb{1} = 0$ ist, liegt 0 in $P\sigma(A)$.

$m \in \mathbb{N}$: für eine normierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $(\lambda - A)f_n \to 0$ für $n\to\infty$. A ist nach (2.3) (c) eine Derivation; für die normierte Folge $(f_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt deshalb

$(m\lambda - A)f_n^m = mf_n^{m-1}(\lambda - A)f_n \to 0$ für $n\to\infty$, also $m\lambda \in A\sigma(A)$.

(2.9) Theorem. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Markov-Verbandshalbgruppe auf C(X) mit Generator $(A, D(A))$ und assoziiertem Fluß φ.

(a) Jede der beiden folgenden Bedingungen impliziert

$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\lambda \le 0\}$:

(i) Für alle $s \neq t$ gilt $\varphi(s,X) \neq \varphi(t,X)$.

(ii) Es gibt ein $t_0 > 0$, so daß die Einschränkung von $\varphi(t_0, \cdot)$ auf $Y := \bigcap_{s\ge 0} \varphi(s,X)$ nicht injektiv ist.

(b) Ist keine der Bedingungen (i) oder (ii) erfüllt, dann ist $\sigma(A)$ eine Vereinigung von Untergruppen der imaginären Achse.

Bemerkung: Das Erfülltsein von (ii) für ein $t_0 > 0$ impliziert dasselbe für alle $t > 0$.

Beweis von (2.9): Da $T(t)$ Markov-Operatoren sind, gilt $r(T(t)) = 1$, woraus nach (1.14) $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\lambda \le 0\}$ folgt.

(a) Aus (i) folgt nach (2.4) (a) sofort die Behauptung, wenn man beachtet, daß die Konstante $a = 0$ ist für Markov-Operatoren.

Um den zweiten Teil von (a) zu beweisen, können wir jetzt annehmen, daß es zwei positive Zahlen $s \neq t$ gibt mit $\varphi(s,X) = \varphi(t,X)$.

Wir betrachten jetzt wieder - wie im Beweis von (2.6) - die auf $C(Y)$ induzierte Halbgruppe $\{\hat{T}(t)\}$ mit Generator $(\hat{A}, D(\hat{A}))$.

Mit der Voraussetzung (ii) folgt, daß $0 \in \sigma(\hat{T}(t_0)) \setminus A\sigma(\hat{T}(t_0))$ ist nach [26] 2.3)d). Diese Teilmenge des Spektrums von $\hat{T}(t_0)$

- das Residualspektrum im Sinne von [23] - ist aber offen ([23] p.310) und in $R\sigma(\hat{T}(t_0))$ enthalten; folglich gibt es eine Zahl $\lambda_0 \neq 0$ in $R\sigma(\hat{T}(t_0))$ und damit gilt $\sigma(\hat{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} / Re\lambda < 0\} \neq \emptyset$ (nach (1.21)).
Man schließt nun weiter wie in b) im Beweis zu (2.6) . Da $\sigma(A') = \sigma(A)$ abgeschlossen ist, folgt $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / Re\lambda \leq 0\}$.
(b) Nach (2.4) bleibt unter den gegebenen Voraussetzungen nur noch die Möglichkeit $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} / Re\lambda < 0\} = \emptyset$, d.h. also $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$.
Damit besteht das Spektrum von A nur aus approximativem Punktspektrum und die Behauptung folgt aus (2.8) .

Bemerkung: Einige wenige Beweisteile von (2.4) bzw. (2.9) lassen sich auch durch Zurückgriff auf die entsprechenden Sätze für Verbandsoperatoren beweisen. Dazu benutzt man die Beziehungen, die zwischen den Spektren von A bzw. von T(t) bestehen. Diese Methode führt aber für den Beweis von (2.5) zum Beispiel nicht zum Ziel; die Aussagen, die zur Verfügung stehen (siehe (1.16)), sind lediglich Existenzaussagen für Spektralwerte von A modulo $\frac{2\pi i k}{t_0}$.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir das Spektrum des Generators (A, D(A)) einer Markov-Verbandshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf C(X) in Abhängigkeit von bestimmten Eigenschaften des assoziierten Flusses genauer beschreiben. Ähnliche Charakterisierungen für Markov-Verbandsoperatoren finden sich in [26] . Der Satz (2.12) stellt eine Verallgemeinerung von Ergebnissen aus [20] §7 dar.

(2.10) Definition. Ein Punkt x_0 in X heißt periodischer Punkt mit Periode $t_0 \geq 0$, falls $x_0 = \varphi(t_0, x_0)$ und $x_0 \neq \varphi(t, x_0)$ für alle $t \in (0, t_0)$ gilt.

Wir können nach (2.9) im Folgenden annehmen, daß das Spektrum von A in der imaginären Achse enthalten ist, also keine der beiden Bedingungen aus (2.9) (a) erfüllt ist.

(2.11) Lemma. Falls in X ein periodischer Punkt x_0 mit Periode $t_0 > 0$ existiert, so ist die Menge $\left\{ \frac{2\pi i z}{t_0} \; / z \in \mathbb{Z} \right\}$ im Spektrum von A enthalten.

Beweis: Nach (2.8) genügt es zu zeigen, daß $\frac{2\pi i}{t_o} \in A\sigma(A)$.
Wir setzen $\mu = \int_0^{t_o} e^{-\lambda s} T(s)' \delta_{x_o} ds$, wobei δ_{x_o} das Dirac-Maß im Punkt x_o bezeichne und $\lambda = \frac{2\pi i}{t_o}$; dann ist μ ungleich 0 und es gilt für $t>0$ $T(t)'\mu = e^{\lambda t}\mu$. Sei nämlich $f \in C(X)$; da x_o die Periode t_o besitzt, folgt

$$\langle f, T(t)'\mu \rangle = \int_0^{t_o} e^{-\lambda s} f(\varphi(t+s,x_o))ds = e^{\lambda t} \int_t^{t+t_o} e^{-\lambda s} f(\varphi(s,x_o))ds = \langle f, e^{\lambda t}\mu \rangle .$$

Dies impliziert $\mu \in D(A^*)$ und $A^*\mu = \lambda\mu$; also $\lambda \in A\sigma(A)$.

Im folgenden Satz werden diejenigen stetigen Flüsse auf X charakterisiert, bei denen das Spektrum des Generators (A, D(A)) aus der gesamten imaginären Achse besteht.

(2.12) Satz. Sei $\{T(t)\}$ eine Markov-Verbandshalbgruppe auf C(X) mit Generator (A, D(A)) und assoziiertem Fluß φ .
Äquivalent sind:

(i) Das Spektrum von A ist gleich der imaginären Achse.

(ii) Es gibt eine Folge von Punkten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, so daß für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Abbildung $\varphi(\cdot,x_n) : [0,n+1] \to X$, $t \mapsto \varphi(t,x_n)$ injektiv ist.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i)
Wegen $\sigma(A) = \sigma(A^*)$ und nach (2.8) genügt es zu zeigen, daß $\lambda \in i\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|\lambda|\leq 1$ im Spektrum von A^* liegt.
Unter Verwendung der Punkte x_n definieren wir für jedes $n\in\mathbb{N}$:

$$\mu_n := \int_0^{n} T(s)'\delta_{x_n} ds \quad \text{und} \quad \nu_n := \frac{1}{n}\int_0^{n} e^{\lambda(n-t)} T(t)'\mu_n dt ;$$

Es gilt $\|\mu_n\| \leq 1$ und nach (1.19) $\mu_n \in E^*$; außerdem nach (1.13) $\nu_n \in D(A^*)$ und

$$\|(\lambda - A^*)\nu_n\| = \frac{1}{n}\|(e^{\lambda n} - T(n)')\mu_n\| \leq \frac{2}{n} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty .$$

Damit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge approximativer Eigenvektoren ist, brauchen wir nur noch $\|\nu_n\| \geq$ const. > 0 für alle $n\in\mathbb{N}$ zu zeigen.

$Y_n := \{\varphi(t,x_n)/t\in[0,n+1]\}$ ist nach Voraussetzung homöomorph zum abgeschlossenen Intervall $[0,n+1]$. Aufgrund des Fortsetzungssatzes von Tietze gibt es folglich stetige Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ mit

$\|f_n\| \leq 1$ und $f_n(\varphi(t,x_n)) = \lambda e^{-\lambda(n-t)}$ für $t \in [0,n+1]$.

Es folgt dann

$$|\langle f_n, \nu_n \rangle| = \left| \frac{1}{n} \int_0^n e^{\lambda(n-t)} T(t)' \mu_n(f_n) dt \right| =$$

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^n e^{\lambda(n-t)} \left(\int_0^{\wedge} f_n(\varphi(t+s,x_n)) ds \right) dt \right| = \left| \frac{1}{n} \int_0^n \left(\int_0^{\wedge} \lambda e^{\lambda s} ds \right) dt \right| =$$

$$\left| e^{\lambda} - 1 \right| > 0 \text{ , da } \lambda \neq 2\pi i z \text{ für alle } z \in \mathbb{Z} .$$

Damit ist diese Richtung bewiesen.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Wir führen den Beweis indirekt.

Wenn die Aussage (ii) nicht erfüllt ist, dann gibt es eine Zahl $t_o > 0$, so daß für alle $x \in X$ zwei verschiedene Zahlen s, $t \in [0,t_o]$ mit $\varphi(s,x) = \varphi(t,x)$ existieren. Insbesondere ist jede Bahn unter φ - B_x bezeichne die Bahn des Punktes x - eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Wir werden zum Widerspruch zu (i) gelangen, indem wir zeigen, daß das Intervall $(0, \frac{2\pi i}{t_o})$ in der Resolventenmenge von A liegt.

(a) Es bezeichne $Y := \bigcap_{s \geq 0} \varphi(s,X)$; aus der obigen Bemerkung folgt $Y := \varphi(t_o,X)$. Sei $J_Y := \{ f \in C(X) / f|_Y \equiv 0 \}$ und der Quotientenraum $C(X)/J_Y$ werde mit $C(Y)$ identifiziert. Die Halbgruppe der auf J_Y eingeschränkten Operatoren $\{T(t)|_{J_Y}\}$ ist nilpotent, und folglich gilt mit (1.24)(i) $\sigma(A) \subset \sigma(\hat{A}) \cup \sigma(A|_{J_Y}) = \sigma(\hat{A})$,

wobei mit $(\hat{A}, D(\hat{A}))$ der Generator der auf $C(Y)$ induzierten Halbgruppe $\{\hat{T}(t)\}$ bezeichnet werde.

Für den Beweis brauchen wir also nur $(0, \frac{2\pi i}{t_o}) \subset \varrho(\hat{A})$ zu zeigen.

(b) Sei $y \in Y$, B_y die Bahn von y und $t_y \leq t_o$ sei die Periode von y; wir nehmen zunächst $t_y \neq 0$ an.

Wir betrachten einen weiteren Quotienten $C(Y)/J_{B_y} \cong C(B_y)$ und die Halbgruppe der induzierten Operatoren $\{\hat{T}(t)_y\}$ mit Generator $(\hat{A}_y, D(\hat{A}_y))$. Da $\hat{T}(t_y)_y = Id_{C(B_y)}$ ist, folgt aus (1.14)

$\sigma(\hat{A}_y) \subset \{ \frac{2\pi i z}{t_y} / z \in \mathbb{Z} \}$ und damit $(0, \frac{2\pi i}{t_o}) \subset (0, \frac{2\pi i}{t_y}) \subset \varrho(\hat{A}_y)$.

Falls $t_y = 0$ ist, d.h. y ein Fixpunkt, gilt $\hat{A}_y = 0$ und folglich die obige Inklusion $(0, \frac{2\pi i}{t_o}) \subset \varrho(\hat{A}_y)$ ebenfalls.

(c) Sei nun $\xi \in (0, \frac{2\pi i}{t_0})$ und $L := \{r + \xi / r \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$.
Die direkte Ausrechnung der Resolvente $R(\lambda, \hat{A}_y)$ für $\lambda \in L \setminus \{\xi\}$ und $y \in Y$ nach der Integraldarstellung (1.7) zeigt, daß es eine Konstante K gibt mit $\|R(\lambda, \hat{A}_y)\| \leq K$ für alle $\lambda \in L \setminus \{\xi\}$ und $y \in Y$. $q_y : C(Y) \to C(B_y)$ bezeichne für jedes $y \in Y$ die Quotientenabbildung. Für $\lambda \in L \setminus \{\xi\}$ gilt nach (1.24) $q_y \circ R(\lambda, \hat{A}) = R(\lambda, \hat{A}_y) \circ q_y$ und damit für $f \in C(Y)$:

$$|R(\lambda, \hat{A})f(y)| \leq \|R(\lambda, \hat{A}_y)\| \cdot \|f|_{B_y}\| \leq K \cdot \|f\| .$$

Da y und f beliebig gewählt waren, gilt also für $\lambda \in L \setminus \{\xi\}$ $\|R(\lambda, \hat{A})\| \leq K$, was $\xi \in \varrho(\hat{A})$ impliziert.

Bevor anhand von Beispielen die Bedingung (ii) aus Satz (2.12) etwas näher betrachtet werden soll, wird noch ein Korollar angegeben.

(2.13) Korollar. Unter denselben Voraussetzungen wie in (2.12) gilt: $\sigma(A) = \{0\}$ impliziert $A = 0$.

Beweis: $A \neq 0$ würde bedeuten, daß es ein t_0 gibt mit $T(t_0) \neq Id$ und folglich einen Punkt $x \in X$, der nicht Periode 0 hat.
Dies widerspricht aber mit (2.11) bzw. (2.12) der Annahme $\sigma(A) = \{0\}$.

(2.14) Beispiele. Wir werden in drei Beispielen Flüsse angeben, so daß in jedem Fall die Aussage (ii) aus Satz (2.12) erfüllt ist. Wie bekannt ist (siehe [25]), lassen sich Flüsse aus den Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen konstruieren.

Beispiel 1: Wir betrachten die eindimensionale Differentialgleichung

$$x' = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Sie führt zu dem wohlbekannten Fluß

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \varphi(t,x) = x + t .$$

Um dieses Beispiel an unsere bisherige Situation anzupassen, können wir die von φ auf $C_{bu}(\mathbb{R})$, dem Banachverband der beschränkten, gleichmäßig stetigen komplexen Funktionen auf $\mathbb{R}$, induzierte Halbgruppe $\{T(t)\}$ betrachten; $C_{bu}(\mathbb{R})$ ist aber als AM - Raum nach dem Satz von Kakutani isomorph zu einem Raum $C(X)$, X kompakt.

$\mathbb{R}$ ist isomorph zu einem dichten Teilraum von X, und der Fluß φ läßt sich zu einem Fluß auf X fortsetzen.

Sei x_0 ein beliebiges Element von $\mathbb{R}$; um die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für (2.12) (ii) zu erhalten, können wir $x_n := x_0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ definieren. Die Aussage (ii) aus (2.12) ist also immer schon dann erfüllt, wenn es eine nichtperiodische Bahn gibt.

Beispiel 2: Sei X die kompakte Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$, dargestellt in Polarkoordinaten

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} / r\in[0,1], \psi\in\mathbb{R} \right\}.$$

Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$r' = 0$$
$$\psi' = r$$

Die Lösungen ergeben den Fluß

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times X \to X \qquad \varphi\left(t, \begin{pmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r\cos(\psi + rt) \\ r\sin(\psi + rt) \end{pmatrix}.$$

Für $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir den Punkt $x_n := \begin{pmatrix} (n+1)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$;

x_n ist periodischer Punkt mit der Periode $2\pi(n+1)$. Die Folge (x_n) erfüllt wiederum die gewünschte Bedingung; im Gegensatz zu Beispiel 1 gibt es aber nur periodische Bahnen, deren Periodenlängen allerdings unbeschränkt sind.

Beispiel 3: Sei $X := [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X$.

Ein Fluß $\varphi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ sei definiert durch

$$\varphi\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x - yt \\ y \end{pmatrix} & \text{für } x - yt > 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} & \text{für } x - yt \leq 0 \end{cases}.$$

Sei $x_n := \begin{pmatrix} 1 \\ (n+1)^{-1} \end{pmatrix} \in X$; die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefert einen dritten Typ von Punkten, die die Bedingung (ii) des Satzes (2.12) erfüllen.

Kapitel 3

Das Spektrum des Generators von Verbandshalbgruppen

Nachdem im vorigen Kapitel das Spektrum des Generators von Verbandshalbgruppen auf C(X) betrachtet worden ist, wenden wir uns jetzt den Generatoren von Verbandshalbgruppen auf beliebigen Banachverbänden zu. Wir werden in (3.4) und (3.7) zeigen, daß das Spektrum solcher Generatoren durch die "additive Zyklizität" vollständig bestimmt ist; die Ergebnisse entsprechen auch hier wieder den von Verbandsoperatoren her bekannten Ergebnissen, wie sie in [24] und [23] Ch.V §4 beschrieben werden.

(3.1) Definition. Eine Menge M komplexer Zahlen heißt additiv zyklisch, falls $\{\mu \in \mathbb{C} / \mu = \mathrm{Re}\lambda + iz\mathrm{Im}\lambda \text{ für } \lambda \in M,\ z \in \mathbb{Z}\}$ in M enthalten ist.

Im Folgenden bezeichne E einen komplexen Banachverband, $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe von Verbandsoperatoren auf E mit Generator (A, D(A)).
Der Beweis von Theorem (3.4) wird durch zwei Lemmata vorbereitet, in denen Aussagen über das Punktspektrum von A bzw. von A' gemacht werden.

(3.2) Lemma 1. Das Punktspektrum von A ist additiv zyklisch.
Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das Punktspektrum von A nichtleer ist. Der Beweis wird für $\lambda \in P\sigma(A)$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ geführt; der allgemeine Fall läßt sich mit Hilfe von (1.11) sofort darauf zurückführen.
Sei $Ax = \lambda x$ mit $0 \neq x \in D(A)$; aus (1.13) folgt $T(t)x = e^{\lambda t}x$ für alle $t \geq 0$. Da T(t) Verbandshomomorphismen sind, gilt
$T(t)|x| = |T(t)x| = |e^{\lambda t}x| = |x|$.
Wir identifizieren das Hauptideal $E_{|x|}$ mit einem AM - Raum C(X) (siehe [23] Ch.II 7.2 Cor.); aufgrund der obigen Gleichheit lassen sich die Operatoren T(t) auf $E_{|x|}$ einschränken. Sie sind darauf Markov-Verbandsoperatoren und nach [23] Ch.III Ex.25 also Algebra * - Homomorphismen.

Wegen der Isomorphie von $E_{|x|}$ mit $C(X)$ gibt es Elemente x^n bzw. $\bar{x}^n = x^n$ bezeichne die n - te Potenz der entsprechenden Funktion in $C(X)$, $\bar{x}$ die konjugiert komplexe Funktion - , für die gilt:

$T(t)\, x^n = e^{n\lambda t} x^n$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und

$T(t)\, \bar{x}^n = e^{-n\lambda t} \bar{x}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Durch Differenzieren folgt sofort die Behauptung $z\lambda \in P\sigma(A)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.

(3.3) Lemma 2. Wenn $\lambda \in P\sigma(A')$, dann ist mindestens eine der folgenden Aussagen richtig:

(i) $\{\beta \in \mathbb{C} / \beta = \mathrm{Re}\lambda + iz\mathrm{Im}\lambda\ ,\ z \in \mathbb{Z}\} \subset P\sigma(A')$,

(ii) $\{\beta \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\beta < \mathrm{Re}\lambda\} \subset P\sigma(A')$.

Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Halbgruppe auf $\omega_0 < 0$ normieren, d.h. insbesondere $\|T(t)\| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und nach (1.14) $0 \in \varrho(A) = \varrho(A')$.

(a) Sei $x' \in D(A')$, $x' \neq 0$ und $A'x' = \lambda x'$.

Wir setzen $z' := R(0,A')|x'| \in D(A')$;

nach [18] p.275 läßt sich die Resolvente $R(0,A')|x'|$ durch $\int_0^\infty T(s)'|x'|\,ds$ darstellen und $R(0,A')$ kommutiert mit $T(t)'$.

Daraus folgt

$$T(t)'z' = R(0,A')T(t)'|x'| = \int_0^\infty T(t+s)'|x'|\,ds = \int_t^\infty T(s)'|x'|\,ds \leq z' .$$

Das Verbandsideal $(E')_{z'} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n[-z', z'] \subset E'$ ist also $T(t)'$- invariant.

Wir betrachten den AL - Raum $(E, z') = \left(\widetilde{E}/N\right)^{\text{kompl.}}$, wobei

$N := \{ x \in E / < |x|, z' > = 0 \}$ und die Norm $p(x+N) = < |x|, z' >$ sei.

Dann läßt sich jeder Operator $T(t)$ kanonisch zu einem kontraktiven Verbandsoperator $\tilde{T}(t)$ auf (E, z') fortsetzen.

Die Halbgruppe $\{\tilde{T}(t)\}$ ist, wie man sofort nachrechnet, auf E/N mit der Norm p stark stetig und folglich wegen der Beschränktheit auch auf (E, z') ([22] Ch.III 4.5) .

$\{\tilde{T}(t)\}$ ist also eine stark stetige Verbandshalbgruppe auf (E, z'), deren Generator mit $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$ bezeichnet werde.

(b) Aus $A'x' = \lambda x'$ folgt $T(t)'x' = e^{\lambda t}x'$;
die Positivität von $T(t)'$ und $R(0,A')$ liefert
$|e^{\lambda t}|\,|x'| = |T(t)'x'| \leq T(t)'|x'|$ und daraus
$|e^{\lambda t}|z' \leq R(0,A')T(t)'|x'| = T(t)'z'$.
Für $x \in E$ gilt damit
$|e^{\lambda t}| < |x|,z'> \leq <|x|,T(t)'z'> = <T(t)|x|,z'> = <|T(t)x|,z'>$,
da $T(t)$ Verbandsoperatoren sind,
für $\tilde{x} \in (E, z')$ also $|e^{\lambda t}|\, p(\tilde{x}) \leq p(\tilde{T}(t)\tilde{x})$.
Wir erhalten damit die wichtigen Aussagen über das approximative Punktspektrum von $\tilde{T}(t)$ bzw. $\tilde{A}$:

$$(*) \quad A \sigma(\tilde{T}(t)) \cap \{\gamma \in \mathbb{C} / |\gamma| < |e^{\lambda t}|\} = \emptyset$$

$$(**) \quad A \sigma(\tilde{A}) \cap \{\beta \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\,\beta < \mathrm{Re}\,\lambda\} = \emptyset \quad .$$

Die letztere Aussage ergibt sich aus (1.14)(ii).

(c) Wir nehmen nun $0 \in \varrho(\tilde{T}(t))$ an - dies gilt dann nach [16] p.26 für alle $t \geq 0$ - und werden hieraus die Gültigkeit von (i) folgern.
Die Injektivität von $\tilde{T}(t)$ impliziert, daß $\tilde{T}(t)$ Verbandsisomorphismen sind, und damit sind auch die Adjungierten $\tilde{T}(t)' \in \mathcal{L}((E, z')')$ Verbandsoperatoren.
Das folgende Schema gibt einen Überblick über die im Folgenden auftretenden Vektorunterverbände von E' und den darauf operierenden Halbgruppen bzw. Generatoren.
Mit "$*$" werde wie in (1.17) die stark stetige adjungierte Halbgruppe bezeichnet. Ebenfalls wird auf (1.25) Bezug genommen.
Die Einbettungspfeile bedeuten, daß der jeweilige Raum als Vektorunterverband im größeren Raum enthalten ist.

$$(E, z')^* \hookrightarrow (E, z')' \cong (E')_{z'} \hookrightarrow E'$$

$$\tilde{T}(t)^* = \tilde{T}(t)'|_{(E,z')^*} \qquad \tilde{T}(t)' = T(t)'|_{(E')_{z'}} \qquad T(t)'$$

$$(\tilde{A}^*, D(\tilde{A}^*)) \subset (\tilde{A}', D(\tilde{A}')) \subset (A', D(A'))$$

Nach Konstruktion ist $\{\tilde{T}(t)^*\}$ eine stark stetige Halbgruppe von Verbandsoperatoren auf dem Banachverband $(E, z')^*$ (nach (1.18)) mit Generator $(\tilde{A}^*, D(\tilde{A}^*))$.

$z' = R(0,A')|x'|$ liegt in $D(A')$, und mit Hilfe einer Ungleichung aus (b) zeigt man $A'z' \geq \mathrm{Re}\lambda\, z'$; daraus folgt $|x'| = -A'z' \leq -\mathrm{Re}\lambda\, z'$, also liegt x' in $(E')_{z'}$.
Wir erhalten damit - wie man dem Schema entnimmt - $\tilde{T}(t)'x' = e^{\lambda t} x'$; dies impliziert, daß x' schon in $D(\tilde{A}^*)$ liegt, und $\tilde{A}^* x' = \mathrm{Re}\lambda\, x'$ gilt.
Wenden wir jetzt das vorige Lemma (3.2) auf $\tilde{A}^*$ an, so erhalten wir $\{\beta \in \mathbb{C}/\beta = \mathrm{Re}\lambda + iz\mathrm{Im}\lambda\ ,\ z \in \mathbb{Z}\} \subset P\sigma(\tilde{A}^*)$.
Die Behauptung (i) ergibt sich wegen $(\tilde{A}^*, D(\tilde{A}^*)) \subset (A', D(A'))$.

(d) Falls 0 im Spektrum von $\tilde{T}(t)$ liegt, gilt wegen (*) aus (b) sogar $\{\gamma \in \mathbb{C}/|\gamma| < |e^{\lambda t}|\} \subset R\sigma(\tilde{T}(t))$.
Nach (1.21) ist damit $\{\beta \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\beta < \mathrm{Re}\lambda\} \cap R\sigma(\tilde{A}) \neq \emptyset$; aus (**) und (1.20) folgt jetzt
$\{\beta \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\beta < \mathrm{Re}\lambda\} \subset R\sigma(\tilde{A}) = P\sigma(\tilde{A}^*) \subset P\sigma(A')$, also die Behauptung (ii) .

Wir können nun den Hauptsatz dieses Kapitels beweisen.

(3.4) Theorem. Das Spektrum des Generators $(A, D(A))$ einer Verbandshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf einem komplexen Banachverband E ist additiv zyklisch.

Beweis: Es gilt $\sigma(A) = A\sigma(A) \cup R\sigma(A)$.
Nach (1.30) und (1.29) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $A\sigma(A) = P\sigma(A)$ ist.
Nach (3.2) ist $P\sigma(A)$ additiv zyklisch.
Sei $\lambda \in R\sigma(A) = P\sigma(A^*) \subset P\sigma(A')$; (3.3) zusammen mit der Tatsache, daß $\sigma(A') = \sigma(A)$ abgeschlossen ist, liefert $\{\beta \in \mathbb{C}/\beta = \mathrm{Re}\lambda + iz\mathrm{Im}\lambda\ ,\ z \in \mathbb{Z}\} \subset \sigma(A)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(3.5) Bemerkungen und Beispiele.

(i) Die Aussage des Theorems (3.4) gewinnt noch an Bedeutung, wenn man bedenkt, daß auch für stark stetige Halbgruppen von Verbandsoperatoren auf Banachverbänden die Beziehung zwischen dem

Spektrum des Generators und den Spektren der Operatoren der Halbgruppe im allgemeinen nicht enger zu sein braucht als bei beliebigen stark stetigen Halbgruppen (siehe (4.5)).

(ii) Aufgrund der Nichtinjektivität der Exponentialfunktion gibt es sehr verschiedenartige additiv zyklische Teilmengen von $\mathbb{C}$, die alle auf dieselbe zyklische Teilmenge abgebildet werden.
An zwei bereits erwähnten Beispielen sollen die Konsequenzen für die Spektraltheorie aufgezeigt werden.
a. Wir betrachten das Beispiel 1 aus (2.14): die Translationshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf $C_{bu}(\mathbb{R})$. Wie dort gezeigt wurde, gilt $\sigma(A) = i\,\mathbb{R}$. Aus (1.14) folgt $\Gamma \subset \sigma(T(t))$ (Γ bezeichne den Einheitskreis), und da die Operatoren $T(t)$ Isometrien sind, sogar $\sigma(T(t)) = \Gamma$ für alle $t \geq 0$.
b. Wir ändern das Beispiel 2 aus (2.14) geringfügig ab.
Sei $X := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} / r \in [2,3],\ \psi \in \mathbb{R} \right\}$ ein Kreisring in der Ebene, dargestellt in Polarkoordinaten.
Der Fluß

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times X \longrightarrow X \qquad \varphi\left(t, \begin{pmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r\cos(\psi + rt) \\ r\sin(\psi + rt) \end{pmatrix}$$

induziert die Markov-Verbandshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf $C(X)$ mit Generator $(A, D(A))$.
Jeder Punkt in X ist periodisch, wobei jede Zahl aus dem Intervall $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$ als Periode auftritt. Nach (2.11) liegt damit die Menge

$$M = \{0\} \cup i\,[2,3] \cup i\,[4,\infty) \cup i\,[-3,-2] \cup i(-\infty,-4]$$

im Spektrum von A. Ähnlich wie im Beweis zu (2.12) zeigt man, daß $\sigma(A) = M$ ist.
Wie in a. folgt für die Spektren von $T(t)$: $\sigma(T(t)) = \Gamma$ für alle $t \geq 0$.
Man sieht an diesem Beispiel, daß 0 ein Pol der Resolvente von A ist, während $e^{0t} = 1$ für kein $t > 0$ Pol der Resolvente von $T(t)$ ist.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir zeigen, daß jede additiv zyklische Teilmenge von $\mathbb{C}$, die überhaupt als Spektrum eines Generators auftreten kann, auch als Spektrum eines Generators einer Verbandshalbgruppe auf einem Banachverband auftritt.

Zur Konstruktion einer geeigneten Halbgruppe benötigen wir folgendes einfache Lemma.

Γ bezeichne den Einheitskreis der komplexen Ebene, μ das normierte Haarsche Maß auf Γ.

(3.6) Lemma. Sei $E = L^2(\Gamma,\mu)$; für $\alpha > 0$ seien die "Rotationen" auf E definiert durch $T(t)f(\gamma) = f(e^{i\alpha t}\gamma)$ mit $f \in E$ und $\gamma \in \Gamma$. $(A, D(A))$ bezeichne den Generator der stark stetigen Verbandshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf E.
Dann gilt:
(i) $\sigma(A) = P\sigma(A) = \{ zi\alpha / z \in \mathbb{Z} \}$;
(ii) $R(\lambda,A)$ ist normal (im Hilbertraumsinn) für $\lambda \in \varrho(A)$.

Beweis: (i) $\{ zi\alpha / z \in \mathbb{Z} \} \subset P\sigma(A)$: die Funktionen $f_z : \Gamma \to \mathbb{C}$ $\gamma \mapsto \gamma^z$ liegen in D(A) und man rechnet sofort nach, daß $Af_z = zi\alpha f_z$ für $z \in \mathbb{Z}$ gilt.
$\sigma(A) \subset \{ zi\alpha / z \in \mathbb{Z} \}$: sei $t_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$; nach (1.14) gilt $e^{t_0\sigma(A)} \subset \sigma(T(t_0)) = \sigma(Id) = \{1\}$.
Daraus folgt für $\lambda \in \sigma(A)$:
$t_0\lambda = 2\pi iz$, also $\lambda = iz\alpha$ für ein geeignetes $z \in \mathbb{Z}$.

(ii) Entgegen der sonst üblichen Konvention werde die Hilbertraumadjungierte mit "+" gekennzeichnet.
Die Halbgruppe $\{T(t)\}$ besteht aus unitären Operatoren. Nach dem Theorem von Stone (siehe z.B. [6] Ch.I 4.8) ist der Generator A schiefhermitsch, d.h. $A^+ = -A$.
Für $\lambda \in \varrho(A)$ gilt deshalb:

$$R(\lambda,A)^+ = ((\lambda - A)^{-1})^+ = (\bar{\lambda} - A^+)^{-1} = -R(-\bar{\lambda},A) .$$

Da nach der Resolventengleichung Resolventenoperatoren miteinander kommutieren, erhalten wir

$$R(\lambda,A)\,R(\lambda,A)^+ = -R(\lambda,A)\,R(-\bar{\lambda},A) = -R(-\bar{\lambda},A)\,R(\lambda,A) = R(\lambda,A)^+\,R(\lambda,A) .$$

(3.7) Satz. Sei M eine abgeschlossene, additiv zyklische Menge komplexer Zahlen, deren Realteile nach oben beschränkt sind. Dann gibt es einen komplexen Banachverband E und eine stark stetige Verbandshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf E mit Generator (A, D(A)), so daß das Spektrum von A gleich M ist.

Beweis: Falls $M = \emptyset$ ist, können wir die nilpotente Verbandshalbgruppe aus (1.15)i nehmen.
Sei jetzt also $M \neq \emptyset$ und $\operatorname{Re} b \leq c$ für alle $b \in M$.
(a) Wir definieren für $b \in M$: $E_b := L^2(\Gamma, \mu)$; die Elemente von E_b werden mit f_b bezeichnet. Weiterhin wird durch

$$T(t)_b f_b(\gamma) := e^{t \operatorname{Re} b} f_b(e^{it \operatorname{Im} b} \gamma) \quad \text{für } f_b \in E_b \text{ und } \gamma \in \Gamma$$

eine stark stetige Verbandshalbgruppe $\{T(t)_b\}$ auf E_b definiert, für die gilt: $\|T(t)_b\| = e^{t \operatorname{Re} b} \leq e^{ct}$.
Für den Generator $(A_b, D(A_b))$ der Halbgruppe gilt nach (1.11)(v) und (3.6)(i) :

$$\sigma(A_b) = P\sigma(A_b) = \{\beta \in \mathbb{C} / \beta = \operatorname{Re} b + iz \operatorname{Im} b,\ z \in \mathbb{Z}\} .$$

Da M additiv zyklisch ist, folgt sofort $M = \bigcup_{b \in M} \sigma(A_b)$.

(b) Wir bezeichnen mit F den Banachverband der beschränkten Familien $(f_b)_{b \in M}$ - versehen mit der kanonischen Vektorraum- und Verbandsstruktur und der Norm $\|(f_b)_{b \in M}\| := \sup\{\|f_b\| / b \in M\}$.
G sei der Unterverband der Familien $(f_b)_{b \in M}$ mit $f_b = 0$ für alle außer endlich vielen Indizes $b \in M$.
$E := \overline{G}$ ist schließlich der gesuchte Banachverband.

(c) Auf F kann man eine Halbgruppe von Verbandsoperatoren definieren:

$$T(t)\,(f_b)_{b \in M} := (T(t)_b f_b)_{b \in M} \quad \text{mit } \|T(t)\| \leq e^{ct} .$$

G und folglich auch E ist T(t)-invariant. Wie sofort aus der Starkstetigkeit der Halbgruppen $\{T(t)_b\}$ folgt, ist $\{T(t)\}$ auf G und damit nach [22] Ch.III 4.5 auch auf E stark stetig.
Der Generator der gesuchten Halbgruppe von Verbandsoperatoren $\{T(t)|_E\}$ werde mit (A, D(A)) bezeichnet.
Wir werden im Folgenden zeigen, daß $\sigma(A) = M$ ist.

(d) Aufgrund der Konstruktion der Halbgruppe $\{T(t)|_E\}$ und nach (a) ergibt sich unmittelbar:

$$M = \bigcup_{b \in M} \sigma(A_b) \subset P\sigma(A) \subset \sigma(A) .$$

(e) Gezeigt wird nun noch die umgekehrte Inklusion $\mathcal{C}M \subset \varrho(A)$.
$d(M_1,M_2)$ bezeichne den euklidischen Abstand zweier Teilmengen M_1 und M_2 von $\mathbb{C}$.
Sei $\lambda \in \mathcal{C}M$; da $M = \bigcup_{b\in M} \sigma(A_b)$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $d(\{\lambda\}, \sigma(A_b)) \geq \varepsilon$ für alle $b \in M$.

Mit (3.6)(ii) schließt man schnell, daß die Resolventen $R(\lambda,A_b)$ für $b \in M$ normal sind; dies impliziert

$$\| R(\lambda,A_b) \| = (d(\{\lambda\}, \sigma(A_b)))^{-1} \leq \varepsilon^{-1} .$$

Der komponentenweise definierte Operator R_λ -
$R_\lambda (f_b)_{b\in M} := (R(\lambda,A_b)f_b)_{b\in M}$ - ist deshalb beschränkt.
Es bleibt nun lediglich noch zu zeigen, daß $R_\lambda = R(\lambda,A)$ ist.

Mit Hilfe der Definition von A bzw. $T(t)|_E$ sieht man, daß der Definitionsbereich von A in der Menge $\{(f_b)_{b\in M} \in E / f_b \in D(A_b)\}$ enthalten ist und für $(f_b)_{b\in M}$ gilt: $A(f_b)_{b\in M} = (A_b f_b)_{b\in M}$.

Folglich ist $R_\lambda(\lambda - A)(f_b)_{b\in M} = R_\lambda((\lambda - A_b)f_b)_{b\in M} = (f_b)_{b\in M}$, also $R_\lambda(\lambda - A) = Id_{D(A)}$.

Wir müssen noch $(\lambda - A) R_\lambda = Id_E$ nachweisen; dies läßt sich leicht nachrechnen, wenn R_λ den Raum E in den Definitionsbereich von A abbildet.
Die analog zu R_λ gebildeten Operatoren R_μ , $\mu \in \mathcal{C}M$, bilden eine Pseudoresolvente (siehe [16] p.69). Das Bild der Operatoren ist folglich unabhängig von μ . Da aber für $\mu \in \varrho(A)$ aufgrund der obigen Aussagen über A $R_\mu = R(\mu,A)$ gilt, folgt $R_\lambda E = R_\mu E = R(\mu,A)E = D(A)$, was schließlich noch zu beweisen war.

Kapitel 4

Das Spektrum positiver Generatoren

Wir schwächen die Voraussetzungen an die Operatoren der stark stetigen Halbgruppe in diesem Kapitel noch weiter ab, indem wir lediglich noch die Positivität dieser Abbildungen verlangen.
Weiterhin bezeichne E einen komplexen Banachverband.

(4.1) Definition. (A, D(A)) heiße positiver Generator, wenn A eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ positiver Operatoren auf E erzeugt.

Diese Definition ist konsistent mit dem Begriff des positiven (stetigen) Operators, da jeder positive Operator ein positiver Generator im Sinne von (4.1) ist - dies ergibt sich sofort aus der Exponentialdarstellung der von einem stetigen Generator erzeugten Halbgruppe.

Bevor wir zum Hauptanliegen dieses Kapitels kommen, der Untersuchung der Menge $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\lambda = s(A)\}$, wird noch auf eine spezielle Symmetrie des gesamten Spektrums positiver Generatoren hingewiesen, die Symmetrie bezüglich der reellen Achse.

(4.2) Lemma. Sei E ein komplexer Banachverband und (A, D(A)) ein positiver Generator auf E.
Dann gilt:
(i) $\lambda \in P\sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in P\sigma(A)$,
(ii) $\lambda \in A\sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in A\sigma(A)$,
(iii) $\lambda \in R\sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in R\sigma(A)$,
(iv) $\lambda \in \varrho(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \varrho(A)$.

Beweis: Der Beweis folgt allein aus der Tatsache, daß A "reell" ist (siehe (1.8)). Wir zeigen als Beispiel nur (i).
Es gilt $E = E_r \oplus i E_r$; sei $Ax = \lambda x$ mit $x = x_1 + ix_2$ $(x_i \in E_r)$ und $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$. Wir erhalten

$Ax_1 + iAx_2 = Ax = \lambda x = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x_1 + ix_2) =$

$(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) + i(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)$. Da A reell und die Zerlegung in reelle Elemente eindeutig ist, folgt $Ax_1 = (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2)$ und

$Ax_2 = (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)$. Wenn wir $\bar{x} = x_1 - ix_2$ setzen, so gilt
$A\bar{x} = Ax_1 - iAx_2 = (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) - i(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) = \bar{\lambda}\,\bar{x}$.

Weitergehende Symmetrieaussagen über das gesamte Spektrum positiver Generatoren sind im allgemeinen nicht möglich: man betrachte dazu positive Matrizen als positive Generatoren.

Wir wenden uns im Folgenden den Spektralwerten von A zu, deren Realteil gleich der Spektralschranke s(A) ist.
Als erstes taucht die Frage auf, ob s(A) für einen positiven Generator im Spektrum liegt. Wie schon in der Einleitung erwähnt, hat Karlin [8] dies bewiesen, allerdings mit einer wesentlichen Beweislücke; diese bestand darin, daß die Integraldarstellung der Resolvente $R(\lambda,A)$ (siehe (1.7)) für $\lambda > s(A)$ angewandt wurde, obwohl diese für beliebige stark stetige Halbgruppen im allgemeinen nur für $\lambda > \omega_0$ (Definition von ω_0 siehe (1.9)) gültig ist, und ω_0 echt größer als s(A) sein kann (siehe (1.15)).

Im nächsten Lemma, das ich einer mündlichen Mitteilung von G. Greiner verdanke, wird jedoch gezeigt, daß für positive Generatoren die Integraldarstellung von $R(\lambda,A)$ für $\lambda > s(A)$ richtig ist.

(4.3) Lemma. Sei E ein komplexer Banachverband, (A, D(A)) ein positiver Generator.
Dann gilt für $\lambda > s(A)$: $R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt$ für alle $x \in E$.

Beweis: Nach (1.11)(v) können wir $s(A) = 0$ annehmen. Für $R(\mu,A)$ mit $0 \leq \omega_0 < \mu$ gilt nach [16] p.23

$$R(\mu,A)^{n+1}x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\mu t} T(t)x\,dt \quad \text{für } x \in E \text{ und } n \in \mathbb{N} .$$

Aufgrund der Holomorphie der Resolvente folgt für $x \in E_+$, $x' \in E'_+$ und $0 < \lambda < \mu$:
$$\langle R(\lambda,A)x,x'\rangle = \sum_{n=0}^\infty (\mu-\lambda)^n \langle R(\mu,A)^{n+1}x,x'\rangle$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^\infty (\mu-\lambda)^n t^n (n!)^{-1} e^{-\mu t} \langle T(t)x,x'\rangle\, dt \right) .$$

Die Funktionen im Integranden sind positiv und die Summenfolge der Integrale $\left(\sum_{n=0}^m \left(\int_0^\infty (\mu-\lambda)^n t^n (n!)^{-1} e^{-\mu t} \langle T(t)x,x'\rangle\, dt\right)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi können wir damit weiter schließen:

$$\langle R(\lambda,A)x,x'\rangle = \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty (\mu-\lambda)^n t^n (n!)^{-1} e^{-\mu t} \langle T(t)x,x'\rangle \right) dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle T(t)x,x'\rangle\, dt .$$

Für $x \in E_+$ konvergiert das monoton wachsende Netz $(\int_0^s e^{-\lambda t}T(t)xdt)_{s \geq 0}$ also schwach gegen $R(\lambda,A)x$. Nach [23] Ch.II 5.9 folgt daraus $R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ für $x \geq 0$; da der positive Kegel E_+ erzeugend ist, gilt die Behauptung für alle $x \in E$.

(4.4) Korollar. Unter denselben Voraussetzungen wie oben folgt auch für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda > s(A)$ die Integraldarstellung

$$R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \quad \text{für alle } x \in E .$$

Beweis: Für $0 \leq r \leq t$ und $x \in E$ gilt

$$\left| \int_r^t e^{-\lambda s}T(s)xds \right| \leq \int_r^t e^{-\mathrm{Re}\,\lambda\, s}T(s)|x|ds \quad ; \text{ da das Netz}$$

$$\left(\int_0^s e^{-\mathrm{Re}\,\lambda\, s}T(s)|x|ds \right)_{t \geq 0} \quad \text{nach (4.3) konvergiert, impliziert}$$

die obige Ungleichung, daß $\left(\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds \right)_{t \geq 0}$ ein Cauchy-Netz ist. Wegen der Vollständigkeit von E existiert also $\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds$.

Man zeigt nun sehr leicht, daß dieses Integral die Resolvente $R(\lambda,A)x$ darstellt (siehe [16] p.9/10) .

(4.5) Bemerkung. Wie bereits mehrmals erwähnt, gilt im allgemeinen $s(A) \neq \omega_0$. Erst in jüngster Zeit hat M. Wolff sogar ein Beispiel einer stark stetigen Verbandshalbgruppe auf einem Banachverband E mit dieser Eigenschaft angegeben ([13] p.41).
Die Existenz des Integrals $\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ für $\lambda > s(A)$ und alle $x \in E$ zieht also auch bei positiven Generatoren nichtnotwendig die Existenz von $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|dt$ nach sich, was aufgrund allgemeiner halbgruppentheoretischer Ergebnisse [16] p.121 $s(A) = \omega_0$ erzwingen würde.
Wie bekannt ist, implizieren bestimmte Kompaktheitsbedingungen an T(t) diese Aussage.
Ebenso läßt sie sich für positive Halbgruppen auf AM - Räumen mit Einheit und auf AL - Räumen nachweisen ([13]) .

Wir können nun sehr leicht die gewünschte Aussage über s(A) beweisen.

(4.6) Proposition. Sei E ein Banachverband und (A, D(A)) ein positiver Generator auf E.
Dann liegt die Spektralschranke im Spektrum von A.

Beweis: Nach Definition von $s(A)$ gibt es eine Folge komplexer Zahlen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß die Realteile $(\mathrm{Re}\,\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $s(A)$ monoton fallende Folge bilden, und $(\|R(\lambda_n,A)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.
Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es ein $x\in E_+$, so daß auch die Folge $(\|R(\lambda_n,A)x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Mit (4.4) schließen wir nun

$$\|\,|R(\lambda_n,A)x|\,\| = \|\,|\int_0^\infty e^{-\lambda_n s}T(s)x\,ds|\,\| \le \|\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_n s}T(s)|x|\,ds\,\|$$
$$= \|R(\mathrm{Re}\,\lambda_n,A)x\|\ ;\ \text{dies impliziert } s(A)\in\sigma(A)\ .$$

Für die folgenden Betrachtungen können und werden wir wiederum die Normierung $s(A) = 0$ voraussetzen.
Wie im Falle positiver Operatoren, so spielt auch bei der Untersuchung positiver Generatoren eine Wachstumsbedingung der Resolvente – analog zu[23] p.326 – die wesentliche Rolle.

(4.7) Definition. Ein positiver Generator (A, D(A)) mit $s(A) = 0$ erfülle die Wachstumsbedingung (W), falls die Menge $\{\lambda R(\lambda,A)\ /\lambda > 0\}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Bei beschränkten Halbgruppen mit $s(A) = 0$ ist (W) nach (1.5) automatisch erfüllt.

Wir werden im nächsten Lemma den Raum E^* (zur Definition siehe (1.17)) als geordneten Banachraum verwenden. Falls E ein Banachverband und $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe ist, so besitzt E^* einen normalen, $\sigma(E^*,E)$ – totalen positiven Kegel E_+^*.

(4.8) Lemma. Sei E ein Banachverband und (A, D(A)) ein positiver Generator, der (W) erfülle.
Falls für ein $x_0 > 0$ für alle $t \ge 0$ $x_0 \le T(t)x_0$ gilt, dann gibt es eine positive Linearform x_0' mit $A^*x_0' = 0$ und $\langle x_0, x_0'\rangle > 0$.

Beweis: Nach (4.3) gilt für $\lambda > s(A) = 0$

$R(\lambda,A)x_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x_0 dt$ und deshalb nach Voraussetzung

$R(\lambda,A)x_0 \geq \lambda^{-1} x_0$.

Mit Hilfe von (1.20)(iii) und der Wachstumsbedingung (W) erhalten wir $\| R(\lambda,A^*)\| \leq \| R(\lambda,A)\| \leq$ const. $\cdot \lambda^{-1}$ für $\lambda > 0$.

Da E_+^* in E_+' $\sigma(E',E)$-dicht ist, gibt es eine Linearform $x' \in E_+^*$ mit $\langle x_0, x' \rangle > 0$.

Setzen wir jetzt $x_\lambda' := \lambda R(\lambda,A^*)x' \in D(A^*)$, so besitzt die Familie $\{x_\lambda'\}$ wegen der Normbeschränkheit einen $\sigma(E',E)$ - Limespunkt für $\lambda \to 0$: $x_0' \in E_+'$. Wir erhalten für x_0'

$\langle x_0, x_0' \rangle \geq \liminf_{\lambda \to 0} \lambda \langle R(\lambda,A)x_0, x' \rangle \geq \langle x_0, x' \rangle > 0$.

Für $x \in D(A)$ gilt nun nach (1.11)(iii) die Gleichungskette

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\lambda \to 0} \langle x, \lambda^2 R(\lambda,A^*)x' - \lambda x' \rangle \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \langle x, \lambda A^* R(\lambda,A^*)x' \rangle \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \langle Ax, \lambda R(\lambda,A^*)x' \rangle \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \langle Ax, x_\lambda' \rangle \\
&= \langle Ax, x_0' \rangle
\end{aligned}
$$

Wir haben also $A'x_0' = 0$, woraus mit (1.19)(iii) $x_0' \in D(A^*)$ und $A^*x_0' = 0$ folgt.

(4.9) Theorem. Sei E ein Banachverband und $(A, D(A))$ ein positiver Generator mit $s(A) = 0$, der die Wachstumsbedingung (W) erfüllt. Für $\lambda \in P\sigma(A) \cap i\cdot\mathbb{R}$ liegt die Menge $\{\beta \in \mathbb{C} / \beta = z\lambda \ , \ z \in \mathbb{Z}\}$ im Spektrum von A .

Beweis: Sei $\lambda \in P\sigma(A) \cap i\cdot\mathbb{R}$; dann gibt es ein $0 \neq x \in D(A)$ mit $Ax = \lambda x$ und folglich $T(t)x = e^{\lambda t} x$ für $t \geq 0$ (siehe (1.13)(iii)). Die Positivität der Operatoren erlaubt uns zu schließen

$0 < |x| = |e^{\lambda t} x| = |T(t)x| \leq T(t)|x|$.

Nach (4.8) existiert also ein $x_0' \in E_+^*$ mit $A^*x_0' = 0$ (d.h. $T(t)^*x_0' = x_0'$) und $\langle |x|, x_0' \rangle > 0$.

Das abgeschlossene Verbandsideal $N = \{y \in E / \langle |y|, x_0' \rangle = 0\}$ ist deshalb $T(t)$ - invariant und enthält das Element x nicht.

Wir bilden den Quotienten $\hat{E} = E/N$ und die Quotientenhalbgruppe $\{\hat{T}(t)\}$ mit Generator $(\hat{A}, D(\hat{A}))$ (siehe (1.22)). Sei $\hat{x} := x + N$; es gilt $\hat{T}(t)\hat{x} = e^{\lambda t}\hat{x}$ für $t \geq 0$, und man zeigt sofort $\hat{T}(t)|\hat{x}| = |\hat{x}|$.

$\{\hat{T}(t)\}$ induziert auf dem Hauptideal $\hat{E}_{|\hat{x}|}$, das nach dem Darstellungssatz von Kakutani zu einem Raum $C(X)$ isomorph ist, eine - i.a. nicht stark stetige - kontinuierliche Halbgruppe von Markov-Operatoren.

Nach [23] Ch.V 4.6 gibt es nun Elemente $\hat{x}^z$ $(z \in \mathbb{Z})$ in $\hat{E}$ - diese entsprechen den Potenzen der Funktion, die zu dem Element $\hat{x}$ korreliert - mit $\hat{T}(t)(\hat{x}^z) = e^{z\lambda t}\hat{x}^z$ für $t \geq 0$.

Durch Differenzieren folgt $\hat{A}\hat{x}^z = z\lambda\hat{x}^z$ für $z \in \mathbb{Z}$.
Wir erhalten $z\lambda \in \sigma(\hat{A})$ und nach (1.24)(ii) $z\lambda \in \sigma(A)$.
Damit ist das Theorem bewiesen.

Das Ergebnis von (4.9) läßt sich auch unter einer etwas schwächeren Voraussetzung als der Wachstumsbedingung (W) ableiten.
Eine wichtige Rolle spielen dabei Halbgruppen auf Quotientenräumen (siehe Kapitel 1 Teil D).
Die folgende Definition schließt sich an [23] Ch.V 4.7 an.

(4.10) Definition. Ein positiver Generator $(A, D(A))$ auf einem Banachverband E heißt (W) - auflösbar, wenn eine endliche Kette $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$ abgeschlossener $\{T(t)\}$ - invarianter Ideale existiert mit $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E$ und so, daß der Generator $(\hat{A}_k, D(\hat{A}_k))$ der auf E_k/E_{k-1} induzierten Halbgruppe $\{\hat{T}(t)_k\}$ für alle $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ die Wachstumsbedingung (W) erfüllt.

(4.11) Satz. Sei E ein Banachverband und $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf E mit Generator $(A, D(A))$, für den $s(A) = 0$ und der (W) - auflösbar ist.
$\lambda \in P\sigma(A)$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ impliziert dann $z\lambda \in \sigma(A)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Kettenlänge n. Für n = 1 haben wir gerade die Situation von (4.9); wir nehmen jetzt an, die Behauptung gelte für alle (W) - auflösbaren positiven Generatoren, wobei die Kettenlänge $1 < n$ sei.

Sei $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = E$ eine Kette der Länge n, $\lambda \in P\sigma(A)$ und $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Wenn wir mit $(\hat{A}_n, D(\hat{A}_n))$ den Generator der auf E/E_{n-1} induzierten stark stetigen Halbgruppe und mit $A|_{E_{n-1}}$ den Generator der auf E_{n-1} eingeschränkten Halbgruppe bezeichnen, so ergibt sich

$\lambda \in P\sigma(A|_{E_{n-1}}) \cup P\sigma(\hat{A}_n)$ (siehe den Beweis zu (1.24)(i)).

(a) Falls λ in $P\sigma(A|_{E_{n-1}})$ liegt, dann gilt $z\lambda \in \sigma(A|_{E_{n-1}})$ $(z \in \mathbb{Z})$ nach Induktionsvoraussetzung. Da $z\lambda$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ im approximativen Punktspektrum von $A|_{E_{n-1}}$ liegen, so sind diese Elemente auch im Spektrum von A enthalten.

(b) Sei $\lambda \in P\sigma(\hat{A}_n)$; nach Definition der (W) - Auflösbarkeit können wir (4.9) anwenden und erhalten $z\lambda \in \sigma(\hat{A}_n)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Die Behauptung folgt jetzt aus (1.24)(ii).

Damit ist der Beweis vollständig geführt.

Literatur

[1] Ando, T.: Positive linear operators in semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.Ser. I. 13 (1957), 214 - 228.

[2] Dunford, N., Schwartz, J.: Linear operators, part I. Interscience, New York (1958).

[3] Fréchet, M.: Sur l' allure asymptotique de densités itérées dans le problème de probabilités 'en chaine'. Bull. Soc. Math. France 62 (1934), 68 - 83.

[4] Frobenius, G.: Über Matrizen aus positiven Elementen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1908), 471 - 476; (1909) 514 - 518.

[5] ——— Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1912) 456 - 477.

[6] Goldstein, J.: Semigroups of operators and abstract Cauchy problems. New Orleans (1970).

[7] Hille, E., Phillips, R.: Functional analysis and semigroups. 2nd ed. Providence, R.J. (1957).

[8] Karlin, S.: Positive Operators. J. Math. Mech. 8 (1959), 907 - 937.

[9] Krein, M.G., Rutman, M.A.: Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 3, no. 1 (23) (1948), 3 - 95 (Russisch).
Auch A. M. S. Transl. 26 (1950).

[10] Lang, S.: Analysis II. Addison-Wesley, New York (1972).

[11] Lotz, H.P.: Über das Spektrum positiver Operatoren. Math. Z. 108 (1968), 15 - 32.

[12] Nagel, R.J.: Unbeschränkte Operatoren. Skriptum zur Vorlesung (1977/78).

[13] ——— Unbeschränkte Operatoren auf Banachverbänden und C* - Algebren. Skriptum zur Vorlesung (1978/79).

[14] v. Neumann, J.: Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. Ann. Math. 33 (1932), 587 - 642.

[15] Niiro, F., Sawashima, J.: Reduction of a Sub-Markov Operator to its Irreducible Components. Nat. Sci. Report Ochanomizu Univ. 24 (1973), 35 - 59.

[16] Pazy, A.: Semi-groups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equations. Univ. of Maryland, Lect. Note 10 (1974).

[17] Perron, O.: Zur Theorie der Matrizen. Math. Ann. 64 (1907), 248 - 263.

[18] Phillips, R.S.: The adjoint semi-group. Pac. J. Math. 5 (1955), 269 - 283.

[19] Rota, G.-C.: On the eigenvalues of positive operators. Princeton(1960).

[20] Scarpellini, B.: On the Spectra of Certain Semi-Groups. Math. Ann. 211 (1974), 323 - 336.

[21] Schaefer, H.H.: Spektraleigenschaften positiver Operatoren. Math. Z. 82 (1963), 303 - 323.

[22] ——— Topological vector spaces. 3rd print, Springer Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[23] ——— Banach lattices and positive operators. Springer Berlin-Heidelberg-New York (1974).

[24] Scheffold, E.: Das Spektrum von Verbandsoperatoren in Banachverbänden. Math. Z. 123 (1971), 177 - 190.

[25] Sell, G.R.: Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. Van Nostrand Reinhold, London (1971).

[26] Wolff, M.: Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in C(X). Math. Ann. 182 (1969), 161 - 169.

[27] Zabczyk, J.: A Note on C_0 - semigroups. Bull. L'Acad. Pol. Sci. 23 (1975), 895 - 898.

Lebenslauf

Am 12. 5. 1951 wurde ich, Roland Friedrich Karl Derndinger, als Sohn des Studienassessors Rolf Derndinger und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Eckert, Sozialarbeiterin, in Wolfach/Schwarzwald geboren. Vom Frühjahr 1958 bis zum Frühjahr 1962 besuchte ich die Volksschule in Lahr/Schwarzwald. Anschließend besuchte ich bis zur Reifeprüfung am 10. 6. 1970 das Scheffel-Gymnasium in Lahr. Nach Ableistung des Wehrdienstes studierte ich vom Sommersemester 1972 bis zum Wintersemester 1976/77 an der Universität Tübingen Mathematik und Physik, wo ich am 9. 12. 1976 die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien in den genannten Fächern bestand. Seit Juni 1976 bin ich verheiratet mit meiner Frau Bärbel, geb. Kreuzer. Vom August 1977 bis Januar 1979 absolvierte ich den Vorbereitungsdienst am Seminar für Studienreferendare Tübingen. Am 16. 1. 1979 bestand ich die Pädagogische Prüfung für das Lehramt an Gymnasien. Seit 1. 2. 1979 bin ich als Studienassessor am Goldberg-Gymnasium Sindelfingen tätig.

Meine akademischen Lehrer an der Universität Tübingen waren im Fach Mathematik die Herren Professoren F. Locher, G. Michler, R. Nagel, H. Salzmann, H.H. Schaefer, P. Schmid, O. Tamaschke, H. Wielandt, im Fach Physik die Herren Professoren M. Baumann, F. Gönnenwein, H. Krüger, G. Mack, H. Pfister, E. Schmid, F. Wahl.